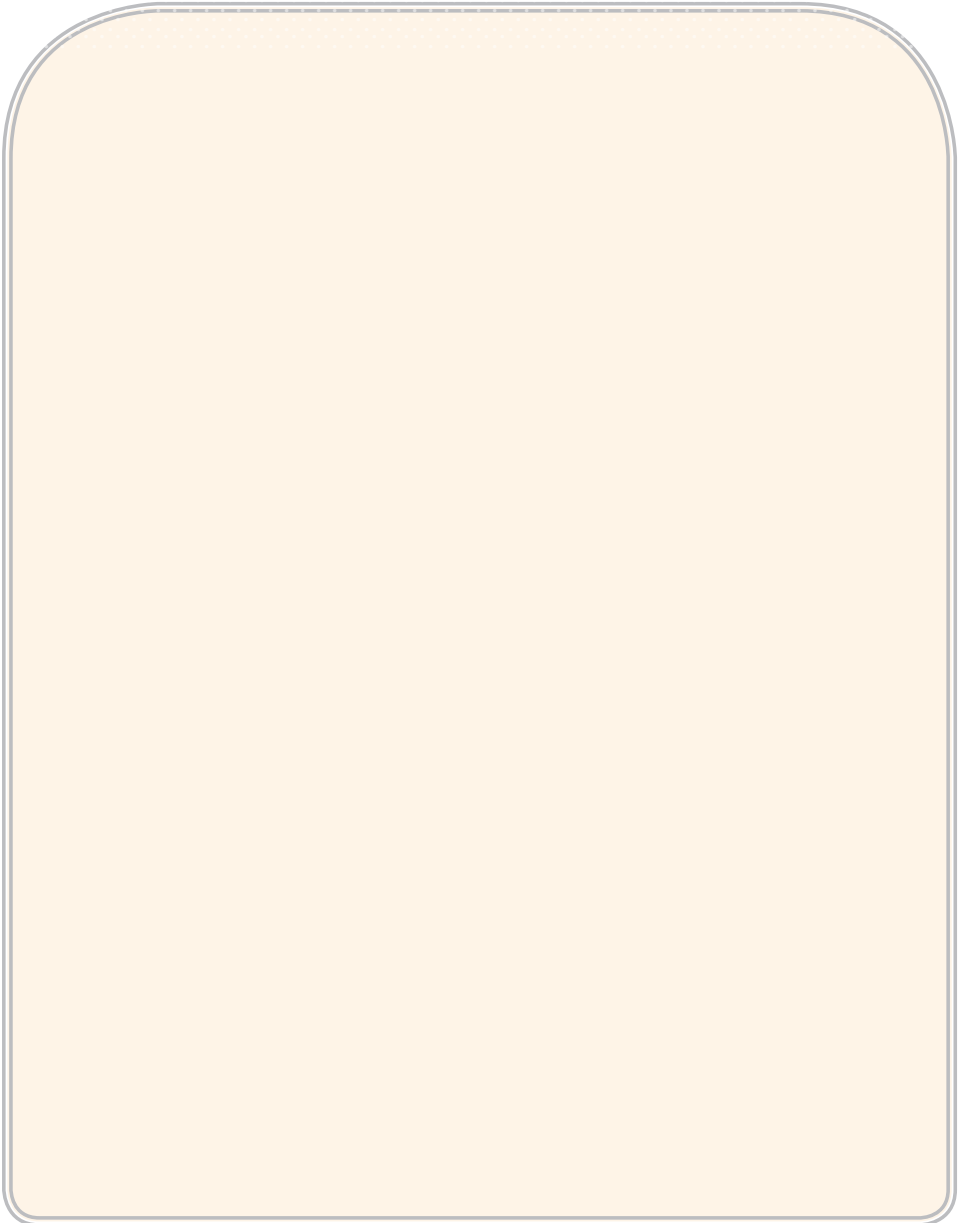




# خط و نسبت‌های مثلثاتی





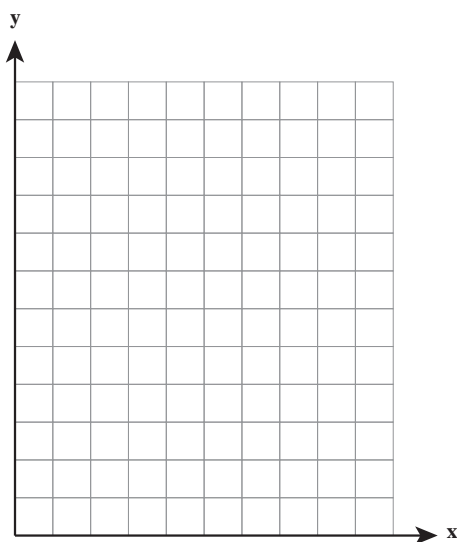
$۲, ۴, ۶, ۸, \dots, ۲n$
$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad n$

وقتی یک دوچرخه سوار در حال حرکت است، بین زمان و مسافت طی شده رابطه وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه‌ای دیده می‌شود. در الگوی عددی بالا نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه وجود دارد که به صورت  $n \rightarrow 2n$  نمایش داده شده است.

### فعالیت

یک دوچرخه با سرعت ثابت در حال حرکت است. یعنی در هر ثانیه ۳ متر را طی می‌کند. با توجه به آن جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) $x$	۰	۱	۲	۳	۴	۵
مسافت (متر) $y$	۰	۳				



چه رابطه‌ای بین زمان و مسافت طی شده وجود دارد؟

با توجه به آن رابطه پس از  $۱۰۰$  ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ اگر  $x$  ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟

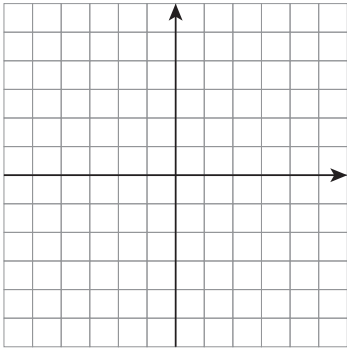
زوج عددهایی که در جدول به دست آورید را به صورت  $\begin{bmatrix} \square \\ \circ \end{bmatrix}$  نشان داده و نمایش هر نقطه را روی نمودار نشان دهید. این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟

## کار در کلاس

۱- اگر محیط مربع را با  $y$  و طول ضلع آن را با  $x$  نشان دهیم چه رابطه‌ای بین محیط و ضلع مربع وجود دارد؟

$$\begin{array}{l} \text{ضلع } x \rightarrow [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4] \quad [100] \quad [x] \\ \text{محیط } y \rightarrow [ ] \quad [ ] \quad [ ] \quad [ ] \quad [ ] \quad [ ] \end{array} \quad y =$$

۲- اگر مساحت مربع را با  $y$  و طول ضلع آن را با  $x$  نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین مساحت و ضلع مربع وجود دارد؟ پس از کامل کردن جدول زیر هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع $x$	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت $y$	۰	۰/۲۵	۱				
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$						

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟

## فعالیت

۱- معادله  $x+y=10$  چند پاسخ دارد؟ ۵ پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد.  
توضیح دهید چرا این تساوی معادله است، و اتحاد نیست.

۲- ۵ پاسخ برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 7$$

$$y = 2x - 1$$

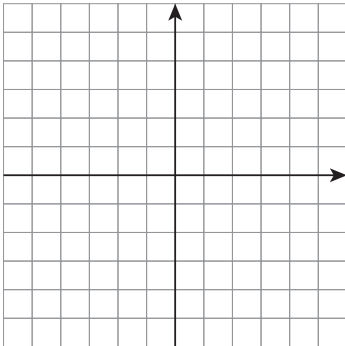
{ { { { {

{ { { { {

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ.

۳- ۶ پاسخ برای معادله زیر بنویسید، سپس هر پاسخ را به صورت  $\left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$  درآورده و نقطه را روی محور مختصات مشخص کنید.

$$y = 2x + 1$$



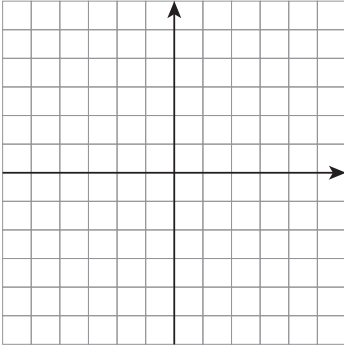
x	0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$
y						
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$						

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟  
 اگر تمام بشمار جواب معادله بالا را در کنار هم رسم می‌کردیم چه شکلی به دست می‌آمد؟  
 برای رسم آن شکل پیدا کردن چند جواب برای معادله کافی بود؟ چرا؟

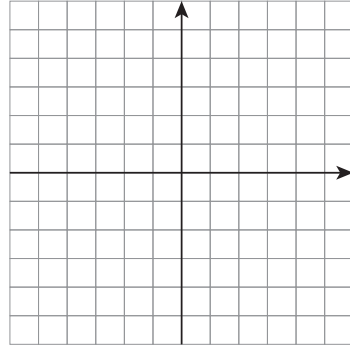
هر معادله به صورت کلی  $y = ax + b$  را یک معادله خطی می‌نامیم. چون در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی محور مختصات نمایش دهیم شکل یک خط به دست می‌آید. به همین دلیل می‌گوییم  $x$  و  $y$  با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا بشمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.

۱- معادله‌های خطی زیر را رسم کنید.

$$y = -x + 3$$



$$2y - 3x = 6$$



۲- آیا خط  $y = 3x$  از مبدأ مختصات (یعنی نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ) می‌گذرد؟ چرا؟

۳- اگر در معادله  $y = ax$  به جای  $a$  عددهای مختلفی قرار دهیم، بیشمار معادله خطی مثل  $y = 3x$ ،

$y = -x$ ،  $y = 2x$  و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟

$y = ax$  فرم کلی معادله‌های خطی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

## فعالیت

۱- مانند نمونه با داشتن دو نقطه، معادله خط را حدس بزنید.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲- با توجه به اینکه با داشتن دو نقطه از خط می‌توان آن را رسم کرد، با داشتن دو نقطه از آن

نیز می‌توان معادله خط را پیدا کرد. شما هم سعی کنید رابطه بین  $x$  و  $y$  (معادله خط) را با داشتن دو

نقطه حدس بزنید.

(در درس‌های بعدی راه پیدا کردن معادله خط را یاد خواهید گرفت)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

۳- معادله یک خط به صورت  $y=3x-1$  است. آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  روی این خط قرار دارد؟

روش تحلیلی (در معادله به جای

$x$  و  $y$  تعداد قرار دهید)

$$y = 3x - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 1$$

روش ترسیمی (خط را رسم کنید و

نقطه روی محور مختصات پیدا کنید)

## کار در کلاس

۱- نقطه‌ای به طول ۲ از خط  $y=2x-1$  پیدا کنید.

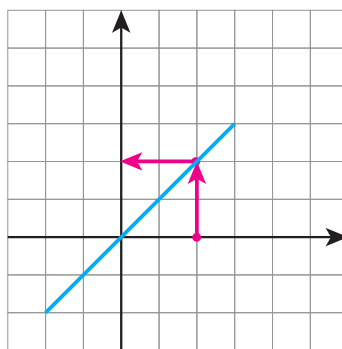
تحلیلی

$$y = 2x - 1$$

$$\downarrow$$

$$y = 2 \times 2 - 1$$

ترسیمی



۲- نقطه‌ای به عرض ۳- از خط  $2y+x=4$  پیدا کنید.

۳- محل برخورد خط  $3x-2y=6$  را با محورهای مختصات پیدا کنید.

۱- خط به معادله  $3x - 4y = 12$  را رسم کنید.

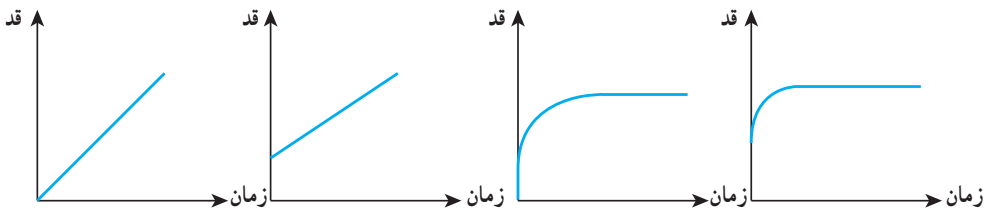
آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  روی این خط است.

مختصات نقاط برخورد خط با محورهای مختصات را پیدا کنید.

نقطه‌ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

۲- یک فنر به طول  $10^\circ$  سانتی متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم  $x$  به آن وصل شود، طول فنر از رابطه  $y = 10 + \frac{1}{8}x$  پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه بین رشد قد یک انسان را از هنگام تولد تا بزرگسال نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف نمودار آن را توصیف کنید. برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور  $y$  به چه معنا است.



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است. معادله خط را حدس بزنید.

الف)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ب)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ج)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

## فعالیت

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید. هر خط را با یک رنگ بکشید.

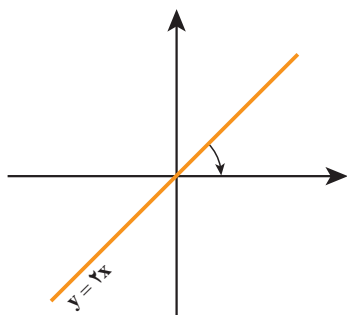
$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = x$$

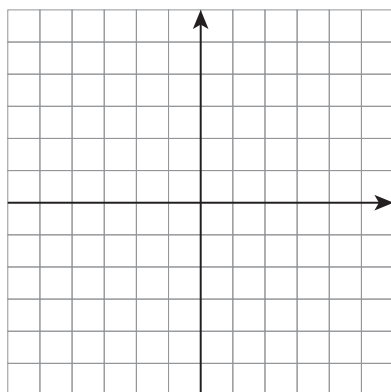
$$y = 2x$$

$$y = -x$$

$$y = -2x$$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند. تفاوت آنها در چیست؟ مانند نمونه زاویه هر خط را با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید چه رابطه‌ای بین ضریب  $x$  و این زاویه وجود دارد؟



۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید. هر خط را با یک رنگ بکشید.

$$y = 2x - 1, \quad y = 2x, \quad y = 2x + 3$$

در این خط‌ها ضریب  $2x$  است، تفاوت خط‌ها در چیست؟ چرا این خط‌ها با هم موازی هستند؟ چه رابطه‌ای بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله مشاهده می‌کنید؟

در معادله خط  $y = ax + b$  عدد  $a$ ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر  $a$  زاویه خط با محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد  $b$  نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.



۱- در هر یک از معادله‌های زیر شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$$y = 2x - 4$$

$$y = -\frac{2}{3}x$$

$$2y - 3x = 5$$

۲- معادله خطی بنویسید که:

(الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن  $\frac{4}{3}$  باشد.

(ب) شیب آن  $\frac{1}{4}$  باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

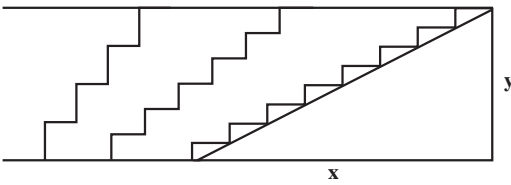
(ج) با خط  $y = 2x$  موازی باشد و از نقطه  $\left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$  بگذرد.

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲- بوده و از نقطه  $\left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$  بگذرد.

$$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow \boxed{b = \quad} \xrightarrow{\text{معادله خط}} \boxed{y = \quad}$$

$\downarrow$              $\downarrow$      $\downarrow$   
 ۲            ۲      ۱

## فعالیت



۱- در تصویر مقابل سه نوع راه پله می‌بینید: در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است.

کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟

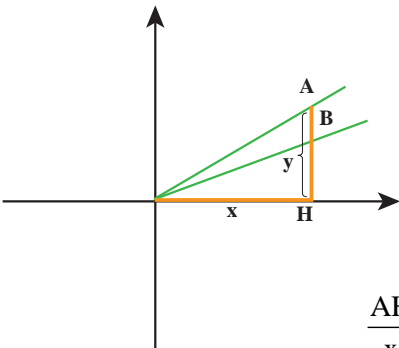
کدام یک تعداد پله بیشتری دارد؟

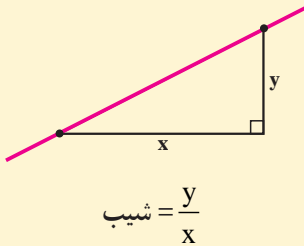
بالا رفتن از کدام یک راحت‌تر است؟

۲- در محورهای مختصات مقابل کدام خط شیب بیشتری دارد؟ نقطه‌های A، B، طول ثابتی دارند ولی عرض آنها متفاوت است.

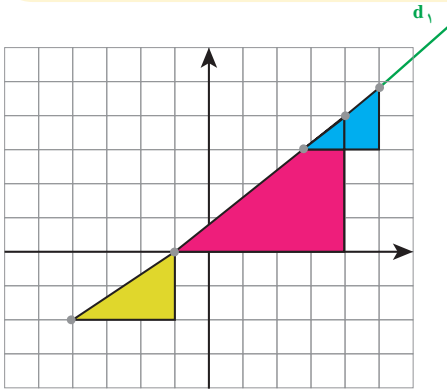
کدام یک از دو نسبت مقابل بزرگ‌تر است؟ چرا؟

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارند؟  $\frac{AH}{x} \bigcirc \frac{BH}{x}$

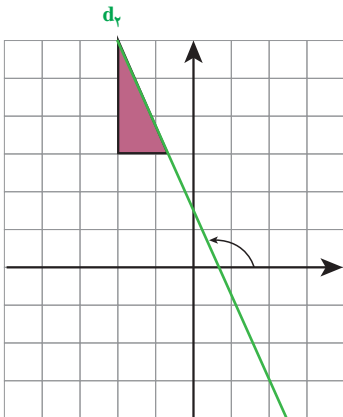




همان طور که در سؤال های قبل دیدید شیب یک خط به مقدارهای افقی و عمودی حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر مربوط می شود. به همین دلیل شیب خط را به صورت مقابل تعریف می کنیم

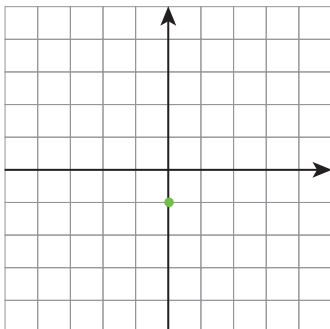


۳- روی خط  $d_1$  دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر بگیرید. با توجه به مثلث قائم الزاویه ایجاد شده شیب خط را پیدا کنید. آیا برای تمام مثلث های قائم الزاویه مشابه نیز این نسبت (شیب) ثابت است؟ عرض از مبدأ خط  $d_1$  چند است؟ چرا؟ معادله خط  $d_1$  را بنویسید.

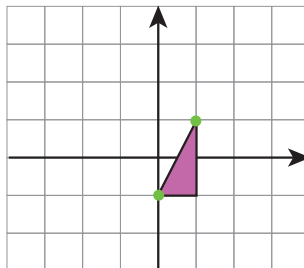


۴- مانند سؤال بالا با انتخاب دو نقطه دلخواه شیب خط را پیدا کنید. از گوشه های مربع های شطرنجی استفاده کنید تا محاسبه شیب ساده تر شود با توجه به اینکه خط زاویه بزرگ تر از  $90^\circ$  با محور طول ها می سازد شیب آن عددی منفی می شود. معادله خط  $d_2$  را بنویسید.

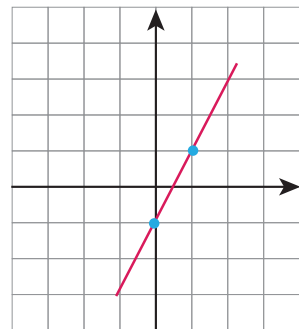
۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط  $y=2x-1$  با روش دیگری مشخص شده است. این روش را توضیح دهید.

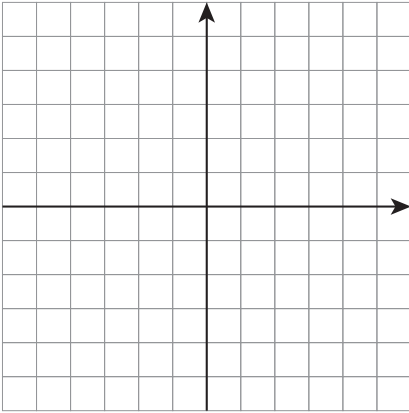


خط از این نقطه می گذرد



با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود





۱- نقاط  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. آیا این نقطه‌ها روی یک خط قرار دارند؟ خط را رسم کنید و معادله آن را بنویسید.

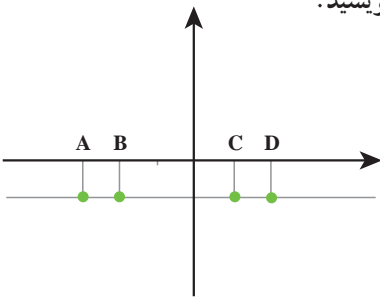
اگر فرم کلی معادله‌های خطی به صورت

$ax + by = c$  باشد، به جای  $a$  و  $b$  و  $c$  چه عددی قرار دهیم تا معادله خط بالا به وجود آید؟

↓   ↓   ↓

$ax + by = c$  فرم کلی معادله‌های خطی است. یعنی اگر به جای  $a$  و  $b$  و  $c$  عددهای مختلفی قرار دهیم، تمام بیشمار معادله خط ممکن که داخل صفحه می‌توان رسم کرد، به دست می‌آید.

۲- مختصات نقطه‌های مشخص شده روی خط را بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

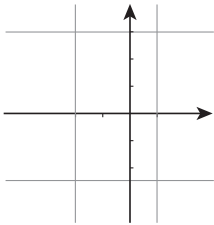
این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ معادله خط رسم شده را بنویسید.

در فرم کلی معادله‌های خطی به جای  $a$  و  $b$  و  $c$  چه عددی قرار دهیم تا معادله خط بالا به دست

آید؟

$$ax + by = c$$

↓   ↓   ↓



- ۱- در محور مختصات مقابل معادله‌های خط‌های رسم شده را کنار هر کدام بنویسید.
- ۲- از محل برخورد دو خط  $y=-3$  و  $x=2$  کدام نقطه به دست می‌آید؟

## تمرین

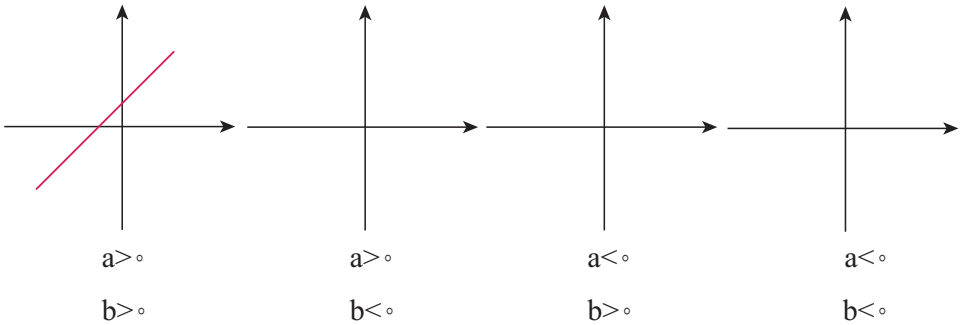
- ۱- خط‌های به معادله  $y=3$  و  $x=-2$  را رسم و محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟
- ۲- معادله محور طول و محور عرض را بنویسید. محل برخورد آنها چه نقطه‌ای می‌شود؟
- ۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا کنید و سپس آن خط‌ها را با داشتن شیب و عرض از مبدأ رسم کنید.

$$3y - 2x = 6$$

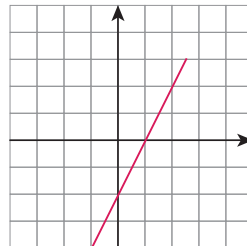
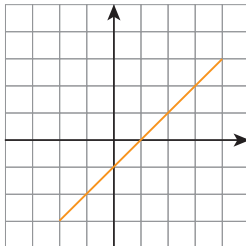
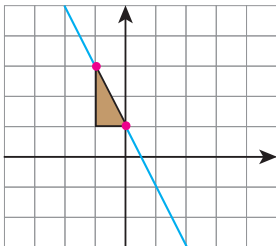
$$4x - 2y = 8$$

$$2x - y = 3$$

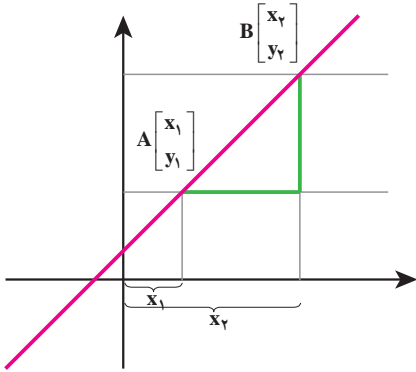
- ۴- خط  $y=ax+b$  را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر خط را به صورت تقریبی (مانند نمونه) روی محور مختصات رسم کنید.



- ۵- با توجه به خط‌های رسم شده معادله خط‌ها را بنویسید.



- ۶- معادله خطی بنویسید که با خط  $2y - 4x = 5$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  بگذرد.  
 ۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.

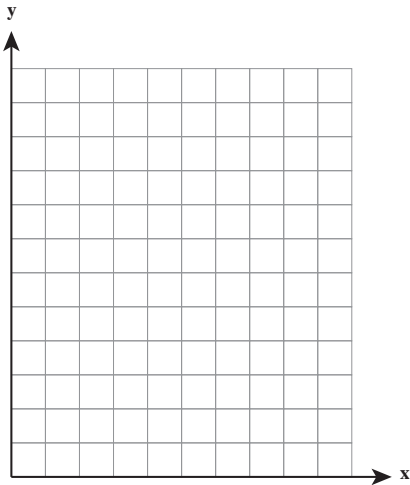


$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

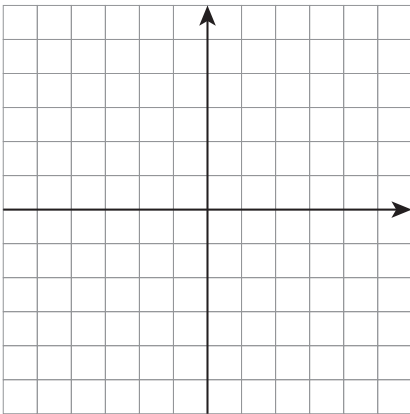
- ۸- دو نقطه از یک خط  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$  است. شیب خط را پیدا کنید. معادله خط را بنویسید.

## فعالیت

۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. اگر هزینه اشتراک را با  $y$  نشان دهیم معادله پیدا کردن هزینه برای  $x$  ساعت را بر حسب ۱۰۰۰ تومان بنویسید. یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت مبلغ ثابت نمی‌گیرد ولی برای هر ساعت ۳۰۰۰ تومان می‌گیرد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک ( $y$ ) و  $x$  ساعت استفاده را بر حسب ۱۰۰۰ تومان بنویسید.



دو خط فوق را روی محور مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد. برای  $1/5$  ساعت استفاده کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چه ساعتی اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟



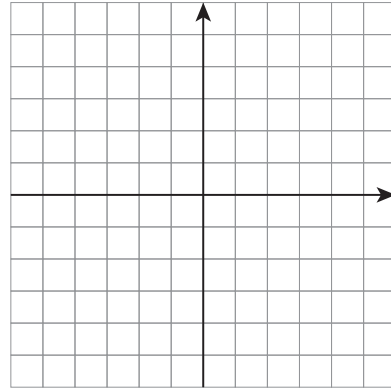
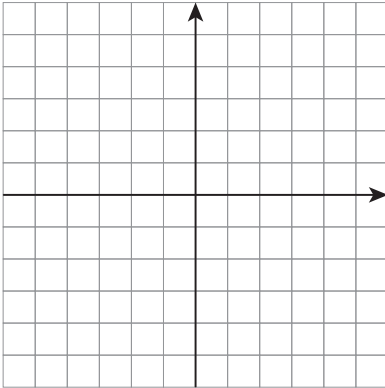
۲- معادله  $y=2x-1$  چند جواب دارد؟ آن را رسم کنید. معادله  $y=-x+2$  چند جواب دارد؟ آن را رسم کنید. چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.

## کار در کلاس

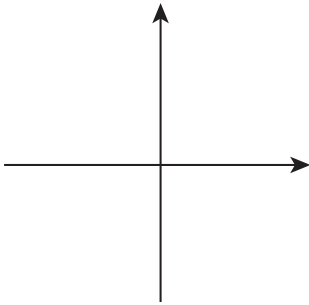
با رسم خط، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید. یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$



## فعالیت



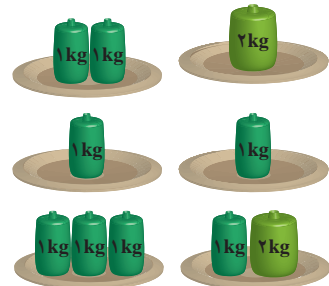
۱- خط  $2x - 3y = 4$  را رسم کنید. خط به معادله  $4x - 6y = 8$  که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است را رسم کنید. الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله خط را در یک عدد ضرب کنیم. ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بیشمار جواب دارد؟ چرا؟

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2 = 2 \\ + 5 = 5 \\ \hline 7 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x = x \\ + 2x = 2x \\ \hline 3x = 3x \end{array}$$

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید.



از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم.

۳- با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده‌اند. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$


---


$$2x = 4$$

$$\boxed{x=2} \rightarrow x + y = 3$$

$$2 + y = 3$$

$$\boxed{y=1}$$

$$2 \times \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$


---


$$5x = 10$$

$$x = 2$$

$$x + 2y = 4$$

$$2 + 2y = 4$$

$$2y = 2 \rightarrow \boxed{y=1}$$

یکی از راه‌های حل کردن دستگاه معادله‌های خطی حذف کردن  $x$  یا  $y$  است تا به یک معادله یک مجهولی برسیم. نام این روش، حذفی است.

## کار در کلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases}$$

## فعالیت

۱- دستگاه معادله‌های خطی مقابل را به روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم، بنابراین مقدار  $y$  را از معادله پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید. نام این روش، جایگزینی است.

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5$$



۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح داده، کامل کنید.

روش ۱:

عرض:  $x$

طول:  $2x-3$

$$\text{محیط} = 2(x+2x-3) = 24$$

روش ۲:

عرض:  $x$

طول:  $y$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x+y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 2y = 24 \end{cases}$$


---


$$-y - 3y = 3 - 24$$

روش ۳:

عرض:  $x$

طول:  $y$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x+y) = 24 \end{cases} \rightarrow 2(x+2x-3) = 24$$

چه شباهتی بین روش های اول و سوم وجود دارد؟

## کار در کلاس

دستگاه های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$$

## تمرین

۱- دستگاه های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2(x-y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x-y) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x+y = 4 \end{cases}$$

- ۲- مقدار  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که تساوی مقابل برقرار باشد.  $۲^{2x-y-2} + ۳^{x+y-1}$
- ۳- معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط  $x-y=1$  و  $x+y=1$  بگذرد و شیب آن

$$-\frac{2}{3} \text{ باشد.}$$

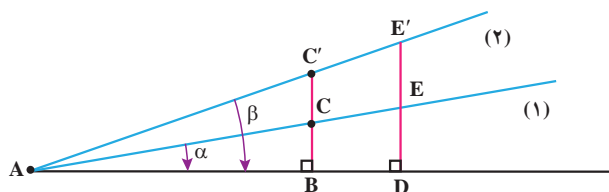
- ۴- معادله مقابل نشان دهندهٔ بیشمار خط است.  $(2m-1)x - (m+1)y = 3m+2$
- اگر به جای  $m$  عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله‌های خطی زیادی به دست می‌آیند اما این دسته خط (بیشمار خط) از یک نقطه می‌گذرند. مختصات آن نقطه‌ها را پیدا کنید.
- ۵- در یک مزرعه روی هم  $۲۰$  شتر مرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها  $۵۶$  عدد است. در این مزرعه چند شتر مرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شتر مرغ  $۲$  پا و گاو را  $۴$  پا فرض کنید)
- ۶- دستگاه معادله خطی مقابل را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

- شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطهٔ مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی‌آید.

یکی از مسئله های مهم در جاده سازی تنظیم شیب جاده است، طوری که وسیله های نقلیه به راحتی بتوانند عبور کنند. هر چه شیب بیشتر باشد حرکت سخت تر و کندتر شده و نیروی بیشتری به ماشین وارد می شود. به طور حتم شما هم هنگام راه رفتن در سر بالایی سختی حرکت را نسبت به راه رفتن روی یک سطح افقی حس کرده اید.



از ریاضیات کمک می گیریم تا درک بهتری نسبت به مفهوم شیب پیدا کنیم.

### فعالیت

۱- در شکل بالا شیب یک جاده نسبت به سطح افق با زاویه  $\alpha$  مشخص شده است. طبق تعریف منظور از شیب این است که در یک حرکت افقی به طول  $AB$  به اندازه چه ارتفاعی بالا می رویم. بنابراین

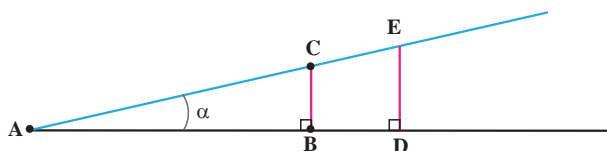
نسبت ارتفاع به طول افقی را می توان به صورت  $\frac{BC}{AB}$  نشان داد.

با توجه به شیب جاده دیگر که با سطح افق زاویه  $\beta$  را ساخته است نسبت ارتفاع به طول افقی

را بنویسید :

- توضیح دهید چرا شیب جاده دوم بیشتر است.
- چه رابطه ای بین شیب و مقدار زاویه با سطح افق وجود دارد؟
- همان نسبت ها را برای طول افقی  $AD$  بنویسید و با هم مقایسه کنید.

۲-



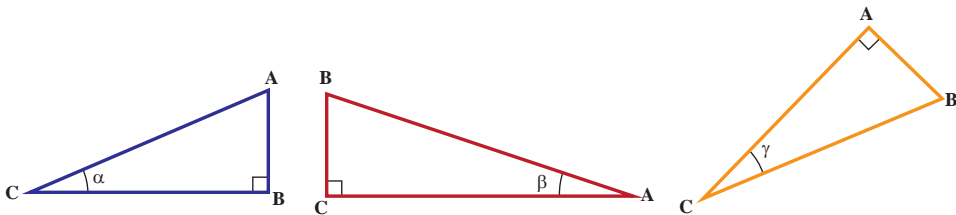
- در شکل بالا نسبت ارتفاع به سطح افقی را برای طول های  $AB$  و  $AD$  بنویسید.
- با اندازه گیری بررسی کنید که آیا این دو نسبت با هم برابرند یا خیر.
- یک نقطه دلخواه دیگر مثل  $F$  روی سطح افقی در نظر بگیرید و با رسم عمود محل برخورد آن را با خط مایل  $G$  بنامید نسبت ارتفاع به طول افقی را به دست آورید. آیا با نسبت های قبلی برابر بود.
- برابر بودن این نسبت چه ارتباطی با زاویه  $\alpha$  دارد؟

با توجه به اینکه نسبت ارتفاع به طول افقی کاربرد زیادی دارد این نسبت را که با زاویه  $\alpha$  نیز رابطه مستقیم دارد تانژانت زاویه  $\alpha$  نامیده اند و به صورت مقابل می نویسند:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

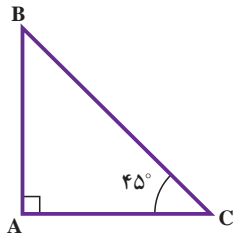
## کار در کلاس

۱- در مثلث های قائم الزاویه زیر تانژانت زاویه مورد نظر را با نوشتن یک نسبت مشخص کنید.



۲- مثلث مقابل قائم الزاویه متساوی الساقین است. با اندازه گیری

مقدار  $\operatorname{tg}45^\circ$  را به دست آورید. (برای پیدا کردن حاصل تقسیم از ماشین حساب کمک بگیرید)



۳- یک زاویه  $3^\circ$  رسم کنیم. با تشکیل یک مثلث قائم الزاویه

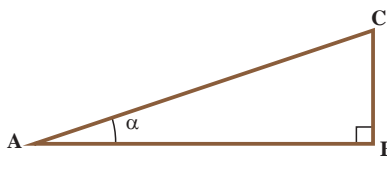
و اندازه گیری طول های مورد نظر  $\operatorname{tg}3^\circ$  را به صورت تقریبی حساب کنید. با ماشین حساب  $\operatorname{tg}3^\circ$  را به دست آورید و با جواب خود مقایسه کنید.

۴- وقتی می گوئیم شیب جاده ۲ درصد است یعنی در هر  $100$  متر افقی به اندازه  $2$  متر بالاتر

می رویم. در این جاده اگر  $400$  متر به صورت افقی حرکت کنیم، چند متر بالاتر می رویم؟

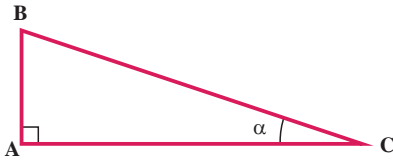
## فعالیت

۱- در همان مثال جاده مقدار طول طی شده روی جاده (یعنی طول AC) نیز اهمیت دارد با توجه به عدد های داده شده طول AC را پیدا کنید.  $AB=200$  متر و  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{100}$



۲- نسبت ارتفاع بالا رفته به طول بیموده شده در سطح جاده را بنویسید و نسبت طول طی شده در سطح افق به طول بیموده شده در سطح جاده را بنویسید.

۳- در مثلث قائم الزاویه مقابل نسبت های موردنظر را زاویه  $\alpha$  بنویسید.

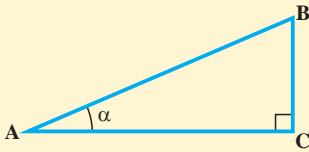


= نسبت طول مجاور به وتر

= نسبت طول مقابل به وتر

= نسبت طول مقابل به طول مجاور

چه رابطه ای بین این نسبت ها وجود دارد؟



در مثلث قائم الزاویه نسبت طول مقابل به

زاویه تند  $\alpha$  به طول وتر را سینوس زاویه می نامند

و می نویسند:  $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$  . نسبت طول ضلع

مجاور به زاویه  $\alpha$  به طول وتر را نیز کسینوس زاویه می نامند و می نویسند:  $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$

## کار در کلاس

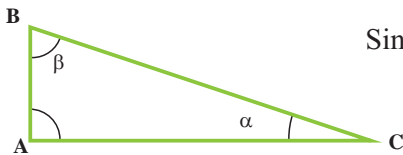
۱- در مثلث های قائم الزاویه زیر سینوس و کسینوس زاویه های خواسته شده را بنویسید.

$$\sin \alpha =$$

$$\cos \alpha =$$

$$\sin \beta =$$

$$\cos \beta =$$



۲- در مثلث زیر طول ضلع های مثلث را اندازه بگیرید و نسبت های زیر را به دست آورید.

$$\sin 3^\circ =$$

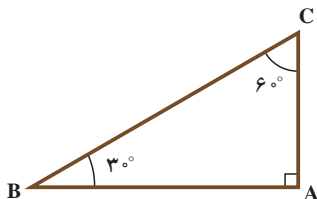
$$\cos 3^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 3^\circ =$$

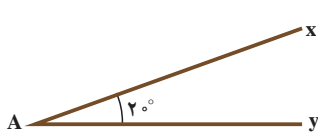
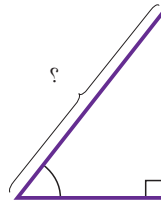
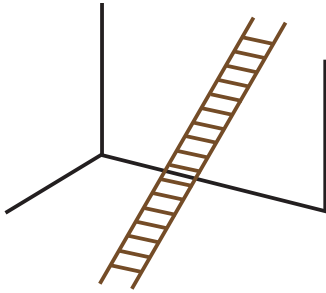
$$\sin 6^\circ =$$

$$\cos 6^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 6^\circ =$$



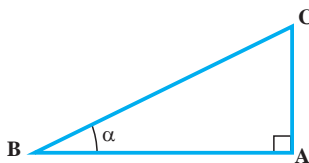
۳- یک نردبان مانند شکل مقابل کنار دیوار قرار گرفته است. از جهت مشخص شده شکل نمادین این وضعیت را کشیده ایم. می دانیم پای نردبان از دیوار به اندازه ۱ متر است و زاویه نردبان با سطح افق  $60^\circ$  است. طول نردبان را پیدا کنید.



۴- یک زاویه  $20^\circ$  رسم کرده ایم روی نیم خط  $Ax$  پاره خط  $AB$  به طول ۱ در نظر بگیرید و با عمود کردن بر نیم خط  $Ay$  سینوس و کسینوس  $20^\circ$  را پیدا کنید.

## فعالیت

۱- در مثلث قائم الزاویه مقابل نسبت های مثلثاتی زیر را بنویسید.



$$\sin \alpha = \quad \quad \quad \cos \alpha = \quad \quad \quad \operatorname{tg} \alpha =$$

۲- چه رابطه ای بین این سه نسبت مشاهده می کنید؟

۳- درستی تساوی مقابل را نشان دهید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

( $\sin \alpha$ )<sup>۲</sup> را برای راحتی کار به صورت  $\sin^2 \alpha$  می نویسیم.)

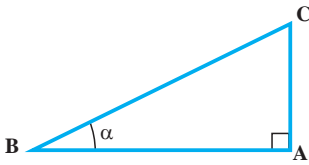
۴- نشان دهید:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

معنی تساوی های بالا این است که: سینوس هر زاویه با کسینوس ..... آن زاویه برابر است و کسینوس هر زاویه با ..... آن زاویه برابر است.

## کار در کلاس



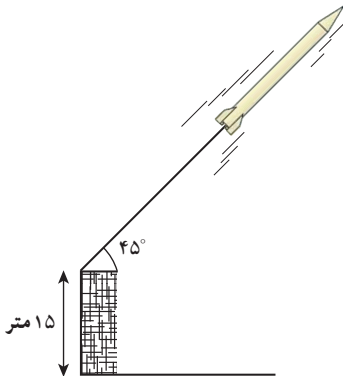
۱- در مثلث قائم‌الزاویه مقابل درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}$$

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1$$

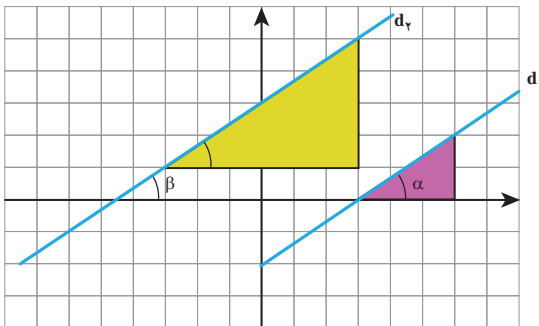
۲- یک هواپیما با زاویه  $3^\circ$  از سطح باند بلند می‌شود و با همین زاویه ثابت ارتفاع بگیرد. چند متر حرکت کند تا ارتفاع آن از زمین  $150^\circ$  متر شود؟

## تمرین



۱- یک موشک با زاویه  $45^\circ$  از سکوی پرتاب که به ارتفاع ۱۵ متر از سطح زمین قرار دارد رها می‌شود. اگر موشک  $2000$  متر با همین شیب ثابت حرکت کند به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

۲-  $\operatorname{tg} 45^\circ$  چند می‌شود؟ چرا؟

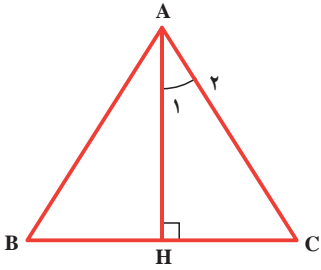


۳- با توجه به شکل مقابل چه رابطه‌ای بین شیب خط  $d_1$  و زاویه آن با محور طول‌ها وجود دارد؟

با توجه به مثلث رسم شده شیب خط  $d_2$  را به دست آورید.

چه رابطه‌ای بین زاویه‌های

$\alpha$  و  $\beta$  وجود دارد؟

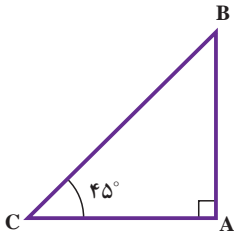


۴- مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع ۲ است. با توجه به ارتفاع AH نسبت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sin A_1 = \quad \cos A_1 = \quad \operatorname{tg} A_1 =$$

$$\sin C = \quad \cos C = \quad \operatorname{tg} C =$$

۵- مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ =$$

$$\frac{1}{\sin 3^\circ} =$$

$$\sin 45^\circ =$$

$$\frac{2\cos^2(3^\circ) - 2\sin 3^\circ}{2\operatorname{tg} 45^\circ + 3\cos^2 6^\circ} =$$

$$\cos 45^\circ =$$