



مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ
(سورة انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه‌ای است شامل ستاره خورشید و سیاره‌هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند. نظیر ستاره خورشید ستاره‌هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است، طوری که اگر به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

فعالیت

در شکل روبه‌رو شماره‌های طبیعی عدد 6^0 را نوشته‌ایم و در بین آن‌ها شماره‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شماره‌های 6^0 را که اول نیستند در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شماره‌های طبیعی و اول عدد 6^0 یعنی ۲، ۳ و ۵ را در

داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم و به هر یک از ارقام ۲، ۳ و ۵ یک عضو می‌گوییم، در این صورت مجموعه A دارای ۳ عضو است.

* شما شماره‌های مرکب عدد 6^0 را به صورت یک مجموعه نوشته و آن را B بنامید.

* مجموعه شامل شماره‌های عدد 6^0 که نه اول باشند و نه مرکب چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C نامیده و آن را نمایش دهید.

* مجموعه D شامل همه شماره‌های دورقمی 6^0 را تشکیل دهید، این مجموعه چند عضو دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شماره‌های 6^0 که مضرب ۴ هستند را تشکیل دهند پاسخ آن‌ها به صورت زیر است:

$$B = \{4, 12, 20, 60\}$$

$$B = \{60, 20, 4, 12\}$$

آیا مجموعه‌هایی که آنها تشکیل داده‌اند باهم فرقی دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در نوشتن و نمایش مجموعه‌ها، جابه‌جایی اعضای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود.

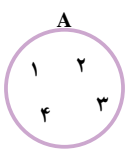
معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره، در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم، مثلاً وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند» نام ورزشکاران و تعداد آنها را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از واژه مجموعه در ریاضی «برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری)» استفاده می‌کنیم.

فعالیت

- ۱- برای هریک از عبارت‌های زیر در صورت امکان یک مجموعه تشکیل دهید.
الف) اعداد طبیعی و یک رقمی (ب) چهار شاعر ایرانی (ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲
(در قسمت (ب) اعضای مجموعه مشخص نیستند)
- ۲- با توجه به شرط متمایز بودن اعضای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:
الف) به جای $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$ باید بنویسیم $A = \{\dots, \dots, \dots, \dots\}$
ب) به دلیل تکراری بودن عدد در $B = \{5, 6, 5, 7\}$ آن را به صورت می‌نویسیم.

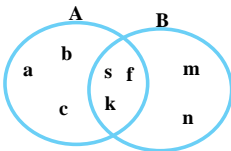
اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, 5, 7\}$ در نظر بگیریم برای نشان دادن این که a عضوی از مجموعه A است می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم « a عضو A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست می‌نویسیم $4 \notin A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست»



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد به عنوان مثال مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم. به این نوع نمایش از مجموعه‌ها، نمودار ون گفته می‌شود.

فعالیت

- ۱- دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید،
الف) برای هریک از این دو مجموعه نمودار ون را رسم کنید (به‌طور مجزا)
ب) دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید، کدام اعداد هم در منحنی بسته مربوط به A و هم در منحنی بسته B وجود دارند؟



- ۲- با توجه به نمودار ون که برای دو مجموعه A و B رسم شده است مجموعه‌های A و B را با اعضایشان مشخص کنید.
- ۳- اگر مجموعه اعداد دورقمی و زوج اول را E بنامیم، این مجموعه چند عضو دارد؟

«اگر در مجموعه‌ای عضو وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد \emptyset نمایش می‌دهیم.»

- ۴- کدام یک از عبارت‌های زیر مجموعه تهی را مشخص می‌کنند؟
 الف) اعداد طبیعی بین ۵ و ۶ ب) اعداد صحیح بین ۱- و ۱
 ج) اعداد اول و زوج د) اعداد یک رقمی طبیعی و مضرب ۳ که اول باشند.

کار در کلاس

- ۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد و سپس عبارت‌های خود را با عبارت‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.
 ۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو، باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک‌عضوی (یکانی) می‌نامند).
 ۳- عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کنند، با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص کنید (با ذکر دلیل)

- الف) چهار عدد فرد متوالی ب) سه عدد زوج متوالی با شروع از ۲
 ج) اعداد اول کوچک‌تر از 20° د) سه شهر ایران ه) شماره‌های عدد ۲۴
 و) ۵ عدد بزرگ ز) چهار فوتبالیست معروف ح) اعداد طبیعی بین ۲ و ۳
 ۴- مانند نمونه کامل کنید:

$E = \{ \text{ی, ... , پ, ب, الف} \}$	مجموعه حروف فارسی
$A = \{ ۴, ۸, ۱۲, \dots \}$	$F = \{ ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \}$
مجموعه حروف a و b	مجموعه اعداد صحیح بین ۲- و ۳-
اعداد طبیعی بین ۲ و ۶	مجموعه اعداد طبیعی و مضرب ۴
$C = \{ ۵ \}$	مجموعه اعداد اول و یک رقمی
$D = \{ \}$	مجموعه اعداد اول و مضرب ۵
$K = \{ ۲, ۴, ۶, ۸ \}$	$H = \{ ۳, ۴, ۵, a, b \}$
مجموعه اعداد طبیعی بین ۲ و ۱۰	$L = \{ ۶, ۴, ۲, ۸ \}$
$B = \{ ۲, ۳, ۵, ۷ \}$	

- ۵- در صورت امکان برای هر یک از عبارات‌های زیر یک مجموعه بنویسید و با نمودار ون نشان دهید.
- الف) اعداد صحیح مثبت و کمتر از 10 (ب) حروف کوچک انگلیسی و نقطه‌دار
 ج) شمارنده‌های اول عدد 19 (د) اعداد صحیح بین $1-$ و 1
 ه) اعدادی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند
 و) اعداد اول بین 13 و 17 (ز) چهار میوه خوشمزه
 ح) اعداد منفی و بزرگتر از یک

تمرین

- ۱- در صورت امکان متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد اعضای هر مجموعه را تعیین کنید :
- الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ (ب) $B = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$
 ج) 5 عدد طبیعی که بین 1 و 20 قرار داشته باشند (د) $C = \{10\}$
 ه) اعداد طبیعی مضرب 3 و کوچک‌تر از 1000
 و) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از 4 و کوچک‌تر از 5
 ز) اعداد صحیح منفی که بین 4 و 7 قرار دارند (ح) اعداد اول دورقمی که مضرب 7 باشند
- ۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.
- الف) مجموعه $A = \{2, 3, 4, 3, 5\}$ دارای عضو است.
 ب) مجموعه $C = \{4, 9, 6, b, 3\}$ با مجموعه $B = \{3, 4, 6, 9, b\}$ هستند.
 ج) عبارت «چهار شاعر ایرانی که خوب شعر می‌گویند» را مشخص نمی‌کند.
 د) مجموعه تهی، مجموعه‌ای است که هیچ ندارد.
 ه) مجموعه $A = \{7\}$ فقط عضو دارد و آن را مجموعه عضوی می‌نامیم.
 و) با توجه به مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ ؛ داریم: 5 عضو A است یا و 12 عضو A نیست یا
- ۳- کدام عضو مجموعه $A = \{21, 23, 24, 25\}$ با بقیه اعضای A فرق دارد؟ چرا؟ 4 مورد پیدا کنید.

دو مجموعه برابر

فعالیت

۱۰		۱۲
-۴		-۲

۱- جدول اعداد صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع اعداد روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود، سپس مجموعه اعداد سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی بوده و میانگین عضوهای آن برابر با ۴ باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارند؟

آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟

همان‌طور که ملاحظه کردید، اعضای دو مجموعه A و B یکسان هستند و هر عضو A ، عضو B و هر عضو B ، عضو A است، در این صورت دو مجموعه A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$.
 ۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با اعضا بنویسید، سپس مجموعه‌هایی را که در زیر معرفی شده‌اند و با A برابرند، مشخص کنید.
 الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰.

ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱.

ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها برابر با ۹ است.

همان‌طور که دیدید مجموعه $\{۱۰, ۹, ۸\}$ با مجموعه $\{۹, ۸, ۷\}$ برابر نیست. زیرا همه عضوهایشان یکسان نیستند.

چنان‌چه عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند.

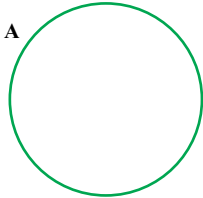
$$\left\{ ۵, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳} \right\} = \left\{ \frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, \sqrt{۲۵} \right\} \text{ الف)}$$

$$\left\{ 7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, \dots, 625 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{5}, \frac{5}{8}, \dots, -2 \right\} \quad (\text{ب})$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B بنویسید که هر عضو A، عضو B و هر عضو B، عضوی از A باشد. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زیر مجموعه

فعالیت



مجموعه عددهای جدول اعداد فعالیت قبل را A بنامید، سپس اعضای مجموعه A را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید.

در نمودار بالا، عضوایی که بر ۳ بخش‌پذیرند، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از A نیز است؟

در مجموعه A، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید. آیا $A = C$ ؟

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعه‌های B و C همگی در A هستند، یعنی هر عضو B،

عضوی از A و هر عضو C نیز عضوی از A است. در این صورت مجموعه‌های B و C هر کدام

زیرمجموعه A هستند و می‌نویسیم $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$.

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش

است یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از A را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشند. نام دیگر این

مجموعه چیست؟

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است، یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

آیا عبارت $\{1, 4, -6, 2\} \subseteq A$ درست است؟ چرا؟

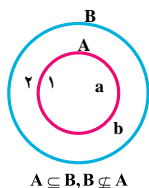
اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟

مثال. دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

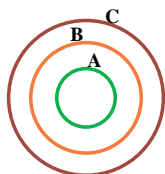
الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$. زیرا در مجموعه سمت چپ، d وجود دارد که در مجموعه سمت راست نیست.

ب) $\{-1, 2, 3, 4, 0, 1\} \subseteq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه سمت راست است.



ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است زیرا همه عضوهای A در B قرار دارد و $B \not\subseteq A$ درست است، زیرا عضوی در B مانند 2 می‌توان یافت که در A وجود ندارند.

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$A \subseteq B, \quad C \not\subseteq A, \quad B \subseteq A, \quad A \not\subseteq C, \\ B \subseteq C, \quad \emptyset \subseteq A$$

۲- مجموعه‌های A ، B ، و C را در نظر بگیرید، سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

$$A = \{1, 3, 6, 4\}, \quad B = \{5, 1, 3\}, \quad C = \{2, 5, 1, 3, 6\} \\ B \not\subseteq A, \quad 3 \subseteq B, \quad A \subseteq B, \quad B \subseteq C, \quad A \not\subseteq C, \quad 2 \in A \\ \{1, 4\} \in A, \quad 6 \notin A, \quad \{5, 6\} \subseteq C, \quad 5 \in C$$

مثال. همه زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ در زیر نوشته شده است.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = A$$

چون \emptyset و A زیرمجموعه‌های A هستند، پس دوتا از این زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌های \emptyset و $A = \{a, b, c\}$ هستند. اکنون مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. ب) $\{a, b, c, d\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با اعداد طبیعی آشنا شده‌اید از این اعداد برای شمارش استفاده می‌کنیم،

مجموعه اعداد طبیعی را با \mathbb{N} نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون مجموعه‌ها را با اعضا و نمودار ون مشخص کردیم، یک روش دیگر نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است. برای مثال، مجموعه اعداد طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را در نظر بگیرید، می‌دانیم اعضای این مجموعه دارای خاصیت مشترکی هستند، یعنی همگی آنها مضرب ۲ هستند و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$ ،

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعه اعدادی به شکل $2k$ به طوری که k متعلق به مجموعه اعداد طبیعی است. در مجموعه E علامت « \mid » خوانده می‌شود «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم.

$$O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

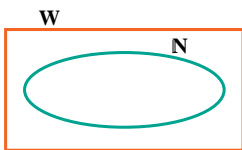
$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 11\} \text{ یا } A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\} \quad A = \{7, 8, 9, 10\}$$

ج) زیرمجموعه‌ای از \mathbb{N} که اعضای آن همگی بر ۳ بخش پذیرند : $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال : مجموعه $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با اعضا مشخص کنید.

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای n یک عدد طبیعی در $5n + 3$ قرار دهید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n + 3$	$\frac{5(1)+3}{8}$	$\frac{5(2)+3}{13}$	$\frac{5(3)+3}{18}$	$\frac{5(4)+3}{23}$...



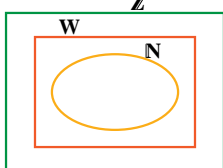
$$N \subseteq W$$

بنابراین داریم : $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی را با W نمایش می‌دهند : $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
مجموعه اعداد حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

$$W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است، یعنی $N \subseteq W$



مجموعه اعداد صحیح را با Z نمایش می‌دهیم :

$$= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه اعداد طبیعی و حسابی، عضو Z هستند، پس : $N \subseteq W \subseteq Z$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) مجموعه عددهای صحیح فرد. (ب) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 5\}$

ج) $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

مجموعه اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهیم، چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، بنابراین نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد، به همین دلیل مجموعه اعداد

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، یک عدد گویا است، یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a = \frac{a}{1}$ ، در

نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq Q$.

تمرین

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر و کدام یک نابرابرند.

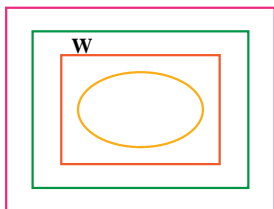
$B = \{x \in A \mid x^2 \leq 2\}$, $C = \{x \in A \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $D = \{x \in A \mid x^2 = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند A و B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$ ؟

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 = 3\}$ (ب) $B = \{2x \mid x = 0, 2, 3\}$

۴- نمودار روبرو، وضعیت مجموعه‌های W, Q, \mathbb{N} و \mathbb{Z} را نسبت به هم نشان می‌دهد، آنها را نام‌گذاری کنید و با علامت \subseteq با هم مقایسه نمایید.



۵- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید.

الف) هر عدد گویا یک عدد حسابی است. (ب) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.

ج) هر عدد صحیح یک عدد گویا است. (د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح هستند.

فعالیت

۱- در یک کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال بوده و سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش داده و سپس با اعضایشان تشکیل دهید.

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، تشکیل دهید:

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند را تشکیل دهید:

۲- دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با اعضایشان تشکیل دهید.

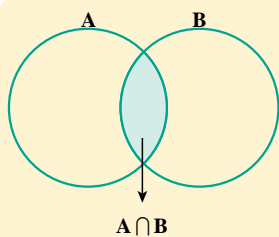
الف) $A = \{ \quad \}$ ب) $B = \{ \quad \}$

ج) $= \{ \quad \}$ = مجموعه اعدادی که در هر دو مجموعه A و B هستند

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم)

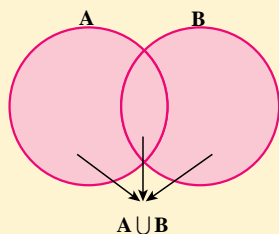
د) $= \{ \quad \}$ = مجموعه اعدادی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هستند

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم)



اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه شامل همه عضوهایی است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم، در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

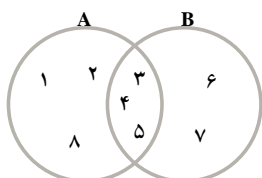


اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای است شامل همه اعضای که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند این مجموعه را با نماد $A \cup B$

نشان می‌دهیم. در نمودار قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال: با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضایشان می‌نویسیم و سپس



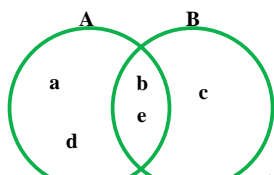
$A \cap B$ و $A \cup B$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\} \text{ , } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

فعالیت

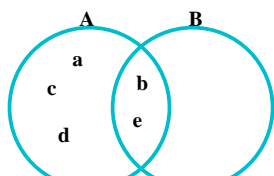
۱- دو مجموعه $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, e\}$ را در نظر بگیرید، از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار ون نمایش دهند که پاسخ ۴ دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:



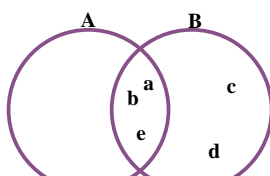
پاسخ حمیده

الف) روی درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کرده

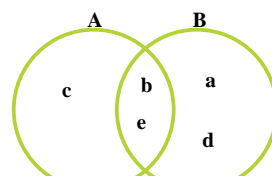
و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



پاسخ سپیده



پاسخ زهرا



پاسخ حنا

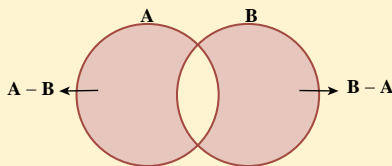
ب) آیا شما هم می‌توانید یک جواب درست دیگر برای این سؤال ارائه کنید؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های همکلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران معرفی شده در دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد ولی عضو تیم فوتبال نباشند (فقط در تیم والیبال بازی کنند) این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم.

$$V - F = \{ \quad \quad \quad \} \quad \quad F - V = \{ \quad \quad \quad \}$$

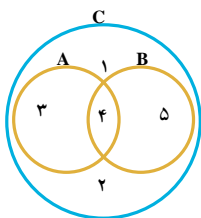
تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه اعضایی که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند در شکل زیر مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ هاشور خورده‌اند.

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر $A = \{a, b, c, d, e, k\}$ و $B = \{c, d, k, f, s, t\}$ در این صورت:
 $A - B = \{a, b, e\}$ و $B - A = \{f, s, t\}$

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟

- الف) $A \subseteq C$ ب) $B \subseteq C$ ج) $C \subseteq (A \cup B)$
 د) $(A \cup B) \subseteq C$ ه) $2 \in (A \cup B)$ و) $4 \notin (A \cap B)$
 ز) $A \cup B = A$ ح) $5 \in (A \cup B)$ ط) $4 \in (A \cup B)$

۲- مجموعه‌های شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه‌های شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن شمارنده ۱۸ باشد ولی شمارنده ۱۲ نباشد.

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که اعضای آن، هم شمارنده ۱۲ و هم شمارنده ۱۸ باشند.

۳- مجموعه‌های $(\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ ، $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$ و $(\mathbb{W} - \mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

قرار داد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. به

عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد می‌نویسیم $n(A) = k$

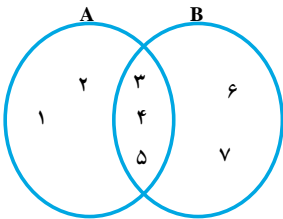
مثلاً اگر $A = \{2, 4, 6, 7\}$ در این صورت $n(A) = 4$

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر می‌گیریم و هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید:

الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$ هـ) $A - B$ و) $C - B$
 ح) $(A \cup B) - C$ ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، گزاره‌های درست را با \checkmark و گزاره‌های نادرست را با \times مشخص

کنید.



الف) $B - A = \{6, 7\}$ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$

د) $n(A \cup B) = 8$

هـ) $A - B = B - A$ و) $n(A - B) = n(B - A)$

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعه (۵) $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه..... همان دو مجموعه است.

ب) هریک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه..... می‌باشند.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B..... هریک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه..... است.

هـ) اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A \cap B)$ مساوی با مجموعه..... است.

در سال گذشته و در کتاب هشتم احتمال رخداد یک پیشامد را با توجه به دستور زیر محاسبه می‌کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌های انجام شده تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن را S ، مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیاندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد؟

ب) عدد رو شده اول باشد؟

ج) عدد رو شده بزرگ‌تر از ۶ باشد؟

د) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد؟



حل: الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم در این صورت داریم:

$$A = \{3, 6\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; n(A) = 2, n(S) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ب) $B = \{2, 3, 5\}; n(B) = 3$; پیشامد رو شدن عدد اول: B

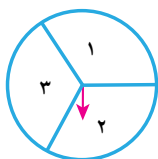
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ج) $C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = 0$; پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶: C

$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{0}{6} = 0$$

د) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$; پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷: D

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$



۱- با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با اعضایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

(الف) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

(ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را یک پیشامد تصادفی می‌نامیم، احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس هستند؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

(ج) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید.

$$A = \{3, 1\} \text{ عقربه روی عدد فرد بایستد}$$

$$B = \{1, 2\} \dots\dots\dots$$

$$C = \{2, 3\} \dots\dots\dots \quad D = \{2\} \dots\dots\dots$$

پاسخهای خود را با پاسخهای هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و به صورت تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



(الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ است، پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده، کمتر از ۵ باشد» مجموعهٔ A را تشکیل داده و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

(ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، $\frac{4}{10}$ باشد.

(ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل داده و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس هستند؟ چرا؟

- ۱- اگر تاسی را بیاندازیم چقدر احتمال دارد :
- (الف) عدد رو شده زوج باشد. (ب) عدد رو شده زوج و بزرگ‌تر از ۲ باشد.
- (ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. (د) عدد رو شده کمتر از ۳ باشد.
- ۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید
 هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د، د، پ) نمایش دهید) و ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو پسر باشد؟ ((د، د، پ) یعنی فرزند اول پسر و دو فرزند بعدی دختر بوده است)
- ۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد اگر ۱ مهره به‌طور تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :
- (الف) این مهره آبی باشد (ب) این مهره سبز نباشد
- (ج) این مهره قرمز یا سبز باشد
- ۴- اگر تاسی را دو بار بیاندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیاندازیم) چقدر احتمال دارد :
- (اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = ۳۶$)
- (الف) هر دو بار عدد اول رو شود. (ب) دو عدد رو شده مثل هم باشد.
- (ج) دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.



فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. مانند نمونه نمایش‌های مختلف مجموعه‌ها را کامل کنید.

نمایش هندسی (محور)	زبان نمادین	توصیف
	$\{x x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳
	$\{x x \in \mathbb{W}, x \leq 2\}$ $\{ \quad \quad \}$	عددهای حسابی
	$\{x x \in \mathbb{Z}, \quad \quad \}$ $\{ \quad \quad \}$	عددهای صحیح بین ۲ و -۳
	$\{ \quad \quad \}$ $\{ \quad \quad \}$	عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱

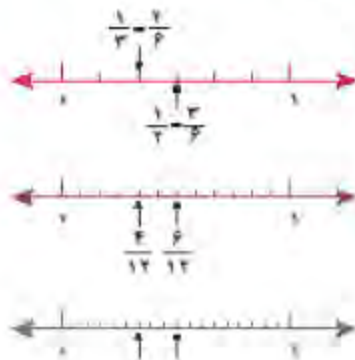
آیا تساوی $3 \geq 3$ درست است؟ چرا؟

۲- می‌خواهیم چند کسر بنویسیم که بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ باشند. روش‌های مختلفی که توسط دانش‌آموز نوشته شده است را بررسی و کامل کنید. راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

روش مریم

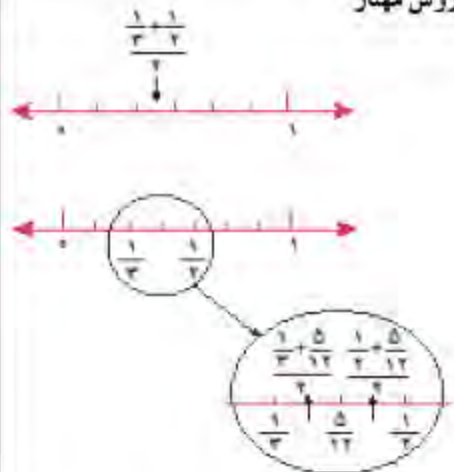
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &< \frac{2}{3} < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{6} &< \frac{3}{6} \\ \times 2 \rightarrow \frac{4}{12} &< \frac{5}{12} < \frac{6}{12} \\ \frac{6}{18} &< \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18} \end{aligned}$$



$$\frac{1}{3} < \frac{4}{6} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1+1}{3+2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < -$$



- الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار کسر پیدا کرد.
 ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با فهرست کردن اعضا نشان داد؟ چرا؟
 ج) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان به صورت کلامی توصیف کرد؟
 د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \right\}$$

کار در کلاس

۱- هر طور که می‌توانید ۳ کسر بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ پیدا کنید.

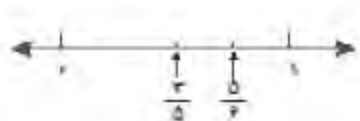
۲- ۲ کسر بنویسید که بین $-\frac{1}{4}$ و -1 باشند.

بین هر دو عدد گویا، بیشمار عدد گویا وجود دارد. عددهای گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا نمایش داد.

فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی که توسط دانش‌آموزان انجام شده است را با هم مقایسه کنید و هر کدام را توضیح

دهید و کامل کنید.



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ را روی محور مشخص کرده است. شما هم نقطه نمایش تقریبی دو کسر دیگر را پیدا کنید.

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرده و با نوشتن کسرهای مساوی آنها را مقایسه می کند. توضیح دهید که عدد 360° چگونه به دست می آید و کار مرتضی را کامل کنید.

$$\frac{5}{6} = \frac{\quad}{360} \quad \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad}$$

روش مجید: مجید با مائین حساب عددهای اعشاری تا ۲ رقم اعشار را برای هر کسر نوشت، شما کار او را کامل کنید.

در مورد روش های مختلف و ویژگی های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید.

$$\frac{5}{9} = 0.\overline{55} \quad \frac{7}{8} = \quad \quad \frac{5}{6} = \quad \quad \frac{3}{5} = \quad$$

۲- با کمک مائین حساب نمایش اعشاری تقریبی کسرهای زیر را بنویسید.

$$\frac{1}{7} = \quad \quad \frac{1}{9} = \quad \quad \frac{7}{6} = \quad$$

$$\frac{1}{5} = \quad \quad \frac{1}{3} = \quad \quad \frac{3}{8} = \quad$$

الف) مائین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می دهد؟

ب) چه تفاوتی بین مقدارهای اعشاری این کسرها وجود دارد؟

$$\boxed{1} \div \boxed{3} = \boxed{\quad}$$

در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می شود و انتها ندارد. ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{5}$ متناهی یا مختوم است چون تمام رقم های اعشار آن مشخص است و به انتها می رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad \frac{7}{6} = 1.\overline{16}$$

۱- هر کدام از کسرهای زیر را با نماد اعشاری متناوب بنویسید.

$$\frac{1}{7} =$$

$$\frac{1}{9} =$$

$$\frac{1}{3} =$$

۲- عددهای اعشاری متناهی را به صورت کسر بنویسید.

$$1/02 =$$

$$1/453 =$$

$$1/2 =$$

$$1/4 =$$

مخرج کسرهای فوق چه ویژگی ای دارد که نمایش اعشاری آنها متناهی می شود؟

۳- مانند نمونه جمع های زیر را انجام دهید.

$$0.\overline{2} + 0.\overline{3} = 0.2222\dots + 0.3333\dots = 0.5555\dots = 0.\overline{5}$$

$$1/\overline{16} + 1/\overline{41} =$$

$$0.\overline{23} + 0.\overline{32} =$$

تمرین

۱- کسرهای مرکب را می توان مانند نمونه زیر با راهبرد زیر مسئله حساب کرد. پس از محاسبه

هر قسمت کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{1 + \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} - \frac{1}{8}}{-1 + \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \div \frac{1}{2}} = \text{---} \times \text{---} = \text{---}$$

$$1 + \frac{3}{2} =$$

$$-1 + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} =$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{2} =$$

۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید تا محاسبات عددهای گویا به طور کامل مرور گردد.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{3}{3} - \frac{1}{1}} \div \frac{5}{3} =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} =$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div \left(2 \div \frac{-6}{5}\right)$$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} =$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}}} =$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$$

$$\bullet \sqrt{14} + \bullet \sqrt{45} =$$

$$\bullet \sqrt{15} + \bullet \sqrt{15} =$$

۴- محاسبات زیر را انجام دهید.

$$\bullet \sqrt{213} + \bullet \sqrt{32} =$$

$$\bullet \sqrt{2914} + \bullet \sqrt{712} =$$

عدد π نیز عدد گنگ است. در زیر عدد π تا 3° رقم اعشار نوشته شده است. اعداد محاسبات حداکثر تا

دو رقم اعشار π استفاده می شود. $\pi = 3/141592653589793238462643383279$

به طور کلی جزر اعدادی که مربع کامل نیستند، گنگ می باشد مانند $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{4}$ ، ...



مثال: نمایش مجموعه های N و Z و Q و Q' به کمک

نمودار ون:

مثال:

$$-\frac{3}{4} \notin Q' \quad \sqrt{3} \in Q' \quad \sqrt{8} \in Q' \quad 0 \in Q \quad 0/20002000200002000 \dots \in Q'$$

کار در کلاس

کدام عبارت درست و کدام عبارت نادرست است؟

$$Q \cap Q' = \emptyset$$

$$N \subset Q'$$

$$Z \subset Q$$

$$Z \subset Q'$$

فعالیت

۱- روی محور نقطه نمایش $\sqrt{2}$ را پیدا کنید.

۲- بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می توان نوشت؟

۳- اگر این اعداد را روی محور نمایش دهیم متناظر با این اعداد چند نقطه روی محور می توان پیدا کرد؟

۴- فرض کنید این نقاط را که هر کدام یک عدد گویا را نمایش می دهند رنگ کنیم آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ می شوند؟ آیا $\sqrt{2}$ نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط که هر کدام نمایش یک عدد گویا هستند یک پاره خط به وجود می آورند؟ چرا؟

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{10}$ روی محور به صورت زیر می باشد.

$$OA' = 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می کنیم. نقطه B

روی محور عدد $\sqrt{10}$ را نمایش می دهد.

مثال: $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد:

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ می‌باشند. یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

کار در کلاس

۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳- مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت

زیر درست است؟

نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

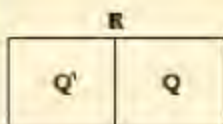


اعداد به دو دسته، اعداد گویا و اعداد گنگ دسته‌بندی

می‌شوند. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را

مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم و آن را با \mathbb{R} نمایش می‌دهیم.

تساوی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ بین سه مجموعه \mathbb{Q} و \mathbb{Q}' و \mathbb{R} برقرار می‌باشد.



مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0/\sqrt{5} \in \mathbb{R}$$

$$0/0.2022022202222... \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{0} \notin \mathbb{R}$$

کار در کلاس

۱- داخل \circ علامت \in یا \notin بگذارید.

$$4 \circ \mathbb{Z}$$

$$0/\sqrt{2} \circ \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \circ \mathbb{R}$$

$$\frac{7}{0} \circ \mathbb{R}$$

$$-5 \circ \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \circ \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\frac{0}{6} \circ \mathbb{R}$$


$$\sqrt{3/5} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/9} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/09} \circ \mathbb{Q}$$

۲- مجموعه‌های سمت چپ را به مجموعه مناسب در سمت راست وصل کنید. هر مجموعه در سمت چپ متناظر با یک مجموعه در سمت راست می‌باشد.

$Q \cap Q'$	Z
$Q \cap Z$	\emptyset
$Z \cap N$	N
$Q' \cap R$	Q'
$Q \cup Q'$	R

محور اعداد حقیقی: اعداد حقیقی را می‌توان روی یک محور نمایش داد و به این محور، محور اعداد حقیقی می‌گوییم. 

هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ می‌باشد پس تمام اعداد حقیقی را می‌توان روی آن نمایش داد.

فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود مانند نمونه، مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

نمونه 

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$

با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ پر و نقطه ۳ توخالی می‌باشد؟

کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور مجموعه متناظر آن را بنویسید.

(الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ 

(ب) $B = \{ \quad \}$ 

(ج) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ 

۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} \sqrt{13} \in A & 0.252552555000 \in B & \sqrt{13} \in A \\ \sqrt{7} \in C & \sqrt{1} \in A & -1000 \in C \end{array}$$

۳- کدامیک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر متناظر است.



الف) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

تمرین

۱- اگر عدد داده شده در سطر جدول در داخل مجموعه داده شده در ستون اول باشد در داخل خانه مربوط به آن ✓ بزنید. در غیر این صورت علامت (-) بگذارید.

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	π	$-\frac{3}{4}$	0.2922922290000	-10	$\frac{6}{2}$
\mathbb{N} طبیعی	-	-	-	-	-	-	✓
\mathbb{W} حسابی							
\mathbb{Z} صحیح							
\mathbb{Q} گویا							
\mathbb{Q}' گنگ							
\mathbb{R} حقیقی							

۲- در هر حالت تفاوت دو مجموعه زیر را با ذکر دلیل بنویسید.

۱) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

۲) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- اگر \mathbb{N} نمایش اعداد طبیعی و \mathbb{Z} نمایش اعداد صحیح و \mathbb{Q} نمایش اعداد گویا و \mathbb{Q}' نمایش اعداد اصم و \mathbb{R} نمایش اعداد حقیقی باشد تساوی‌های زیر را کامل کنید.

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' =$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$ ۴) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' =$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵- بین اعداد زیر ۴ عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$

ب) $\sqrt{9}, 6$

ج) ۶ و ۷ د) -۲ و ۵

۶- عبارات درست را با \checkmark و عبارات نادرست را با \times مشخص کنید. برای عبارات مثال بزنید.

□ (۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.


□ (۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

□ (۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.

□ (۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷- در نمایش تقریب اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{3}{7}$ چه تفاوتی وجود دارد؟

فعالیت

- ۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید.
- 
- نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهند؟
 فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟
 فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟
 می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.
- ۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد، چند نقطه می توان یافت؟

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ قدر مطلق a می نامیم و با علامت |a| (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می دهیم.

$$\text{بنابراین در مثال بالا می توان نوشت: } |-2| = |2| = 2$$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ تا مبدأ برابر $\frac{2}{3}$ است. پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق $-\sqrt{5}$ را به صورت $|\sqrt{5}|$ نشان می دهیم و مساوی $\sqrt{5}$ است. قدر مطلق

400 را به صورت $|400|$ نشان می دهیم و مساوی 400 است.

قدر مطلق صفر مساوی، صفر و قدر مطلق اعداد مثبت برابر خود آن عدد است.

و قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|700 + 25| = |725| = 725$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید.

- | | |
|-------------------|--------------------------------------|
| ۱) $a > 0, b < 0$ | الف) دو عدد a و b مثبت می‌باشند. |
| ۲) $a > 0, b > 0$ | ب) عدد a نامنفی است. |
| ۳) $a \geq 0$ | ج) دو عدد a و b منفی می‌باشند. |
| ۴) $a < 0, b < 0$ | د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. |
| ۵) $a \leq 0$ | ه) عدد a نامثبت است. |

۲- هر عبارت سمت راست نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است عبارات مناسب را به هم وصل کنید.

- | | |
|-------------------|------------------------|
| ۱) $a > 0, b > 0$ | ۱) $ab < 0$ |
| ۲) $a < 0, b < 0$ | ۲) $ab > 0, a + b > 0$ |
| ۳) $a < 0, b > 0$ | ۳) $ab > 0, a + b < 0$ |

۳- هر عبارت سمت راست نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید.

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| ۱) $a > 0$ | ۱) $ a = -a$ |
| ۲) $a > 0, b > 0$ | ۲) $ a = a$ |
| ۳) $a < 0$ | ۳) $ a + b = a + b$ |
| ۴) $a < 0, b < 0$ | ۴) $ a + b = -(a + b)$ |

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

- ۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد مساوی حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد از مجموع قدر مطلق آن دو عدد کوچک‌تر یا مساوی است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار در زیر نوشته شده است.

$$\sqrt{2} = 1/4 \quad \sqrt{3} = 1/7 \quad \sqrt{5} = 2/2 \quad \sqrt{6} = 2/4 \quad \sqrt{7} = 2/6$$

۱- با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل تساوی‌های زیر را مانند نمونه با ذکر دلیل خود توضیح دهید.

$$\text{نمونه ۱) } |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل: $\sqrt{2} = 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می‌شود.

$$۲) |2 - \sqrt{3}| = \text{دلیل:}$$

$$۳) |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = \text{دلیل:}$$

$$۴) |2\sqrt{5} - \sqrt{5}| \text{ دلیل:}$$

$$۵) |-4 - \sqrt{3}| = \text{دلیل:}$$

مثال: اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = -3$ باشد حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به دست می‌آوریم:

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -2/5 + \sqrt{2} \right|$$

چون $-2/5 + \sqrt{2}$ عدد منفی است ($\sqrt{2} = 1/4$) پس حاصل عبارت مساوی با $(-(-2/5 + \sqrt{2}))$ یعنی $2/5 - \sqrt{2}$ است.

$$\text{مثال: } \underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-2 - \sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$$

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق می‌توانیم بنویسیم $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: برای محاسبه $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

۱- اعداد توان دار را با هم مقایسه کنید.

$$0.7^2 \circ 0.7^4 \quad 0.7^2 \circ 0.3^2 \quad 0.04^5 \circ 0.05^5 \quad -2^5 \circ 0.1^2 \\ 0.2^5 \circ 0.2^6 \quad 1/5^2 \circ 1/6^2$$

۲- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$|0| = \quad \left| -\frac{4}{3} \right| = \quad |0.7^2 - 0.7^2| = \quad |0.2^5 - 0.2^6| =$$

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$1) \sqrt{(-2595)^2} = \quad 2) \sqrt{(1394)^2} = \quad 3) \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \\ 4) \sqrt{(-3+\sqrt{10})^2} =$$

تمرین

۱- اگر $a = 0.25$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2\frac{1}{4}$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

۲- حاصل عبارات زیر عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } |3\sqrt{5}| \quad \text{ب) } |7-5\sqrt{3}| \quad \text{ج) } |0+\sqrt{5}| \quad \text{د) } |2\sqrt{8}-5\sqrt{2}| \\ \text{ه) } |48-1-\sqrt{5}|$$

۳- حاصل را به دست آورید.

$$\text{الف) } |2^2 - 2^2| \quad \text{ب) } |0.1^2 - 0.1^2| \quad \text{ج) } |3^2 - 3^2 + 3^2| =$$

۴- حاصل عبارات زیر را به دست آورید و جواب را تا حد امکان ساده کنید.

$$|-\sqrt{18}-5\sqrt{2}+15\sqrt{2}| \quad |\sqrt{90}-5\sqrt{20}+\sqrt{2}|$$

۵- آیا رابطه $a+|a| \geq 0$ برای هر عدد حقیقی a درست است؟ چرا؟

راهنمایی: برای a سه حالت مختلف در نظر بگیرید ($a > 0$, $a = 0$, $a < 0$)

۶- با ارائه یک مثال نادرست، بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۷- حاصل عبارات روبرو را به دست آورید. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \quad \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$