

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال هفتم با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شدند: منشوری، کره و هرمی.

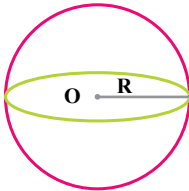


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره هستند. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره را نام ببرید.

فعالیت

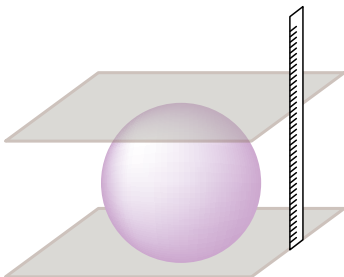
۱- به تعریف دایره به‌عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت شعاع دایره می‌گوییم.



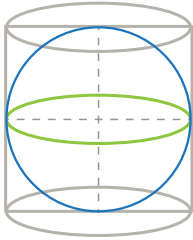
با توجه به تعریف فوق در قسمت زیر، کره را به‌عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

کره مجموعه از فضا است که مرکز هستند. به این اندازه می‌گوییم.



۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت راهی برای محاسبه حجم کره پیدا کنیم.

- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
- مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی قطر کره را اندازه بگیرید.



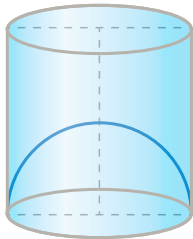
● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

ارتفاع استوانه :

شعاع قاعده استوانه :

حجم استوانه (در کلاس هفتم یاد گرفتید) :



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپسند تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود و مانند شکل مقابل یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر کنید و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با ۲ نیم کره فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

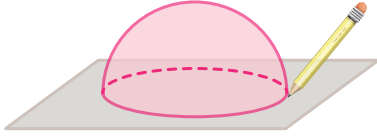
ج) بنابراین حجم کره برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه که در بالا ذکر شده، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$\text{حجم کره ای: شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می آید.}$$

کار در کلاس

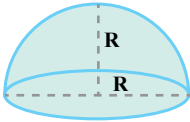
- ۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر و ارتفاع 10 سانتی متر محاط شده است.
 - الف) حجم کره را به دست آورید.
 - ب) حجم استوانه را به دست آورید.
 - ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.
- ۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع 100 سانتی متر را به دست آورید.



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ دایره رسم کنید، طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند.

این دو نیم دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حداقل یک کاغذ روی هم قرار نگیرند و هم سطح نیم کره دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید.



۲- در هندسه ثابت می‌کنند که مساحت رویه نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است. (قاعده نیم کره)
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با :
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با :

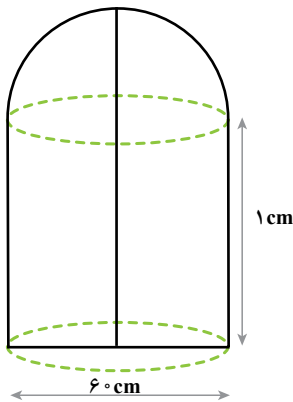
مساحت کل یک کره به شعاع R برابر است با :

کار در کلاس

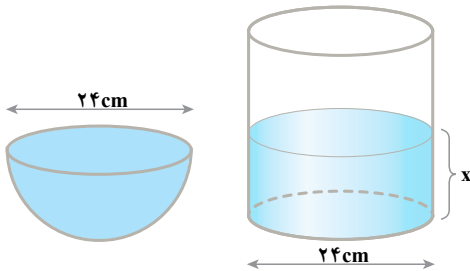
۱- مساحت یک کلاه (عرق‌چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع ۱۰ سانتی متر را پیدا کنید.
۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

چه تفاوتی بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق‌چین وجود دارد؟

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین بر حسب کیلومتر را با نماد علمی بنویسید.
 ب) قطر و شعاع کره زمین بر حسب متر را با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.
 د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $۱/۶۴۸/۰۰۰$ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



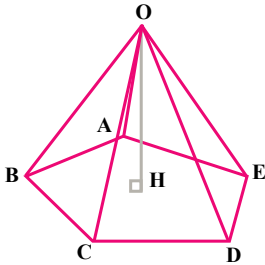
- ۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶۰ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.
 اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط آنکه هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ احتیاج داشته باشد.



- ۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم. آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟



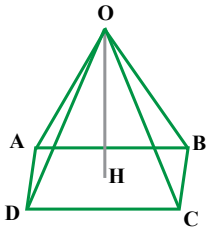
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. ۳ نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید.



هرم یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم یک چند ضلعی محدب است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی سطح‌هایی قرار دارند که در یک نقطه به نام رأس یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: تعداد وجه‌ها: شکل وجه‌ها: شکل قاعده: نام قاعده:

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود ارتفاع هرم می‌گویند.

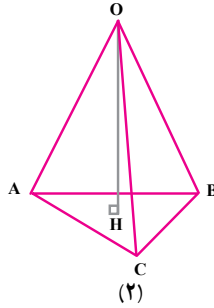
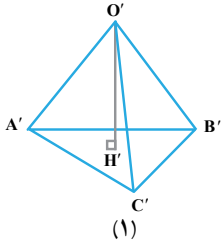
فعالیت



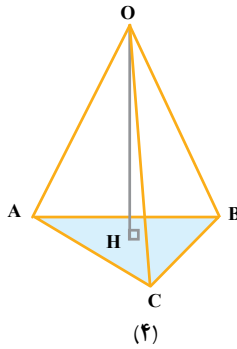
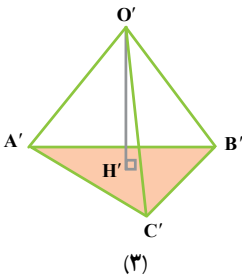
۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد پای ارتفاع روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس: ارتفاع: شکل قاعده: شکل وجه‌های جانبی:

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟

مثلث‌های قاعده هم نهشت هستند.



$$V_1 \circ V_2 \quad OH > O'H'$$



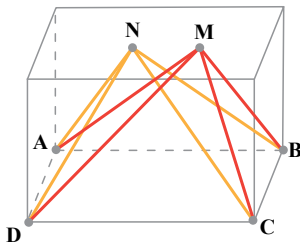
$$V_3 \circ V_4 \quad S_{ABC} < S_{A'B'C'} \\ OH = O'H'$$

ب) به نظر شما حجم هرم وابسته به چه مقادیری است؟ چه شباهتی بین حجم هرم و مساحت مثلث (مساحت قاعده هرم) وجود دارد؟

ج) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، دربارهٔ حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟

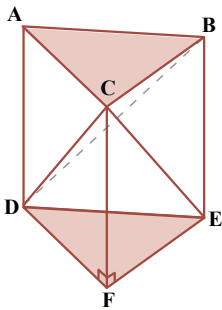
اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و N و M دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') هستند. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان می‌باشند؟ به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

فعالیت



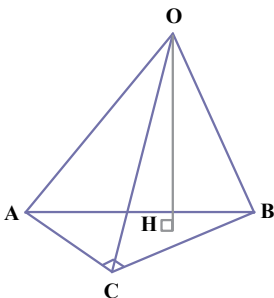
در شکل مقابل منشور با دو قاعده $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های D و E و همچنین نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم. با توجه به ویژگی های منشور که در سال هفتم دیدید و خواص هرم، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- ۱- چهارضلعی ABED چه نوع چهارضلعی است؟
- ۲- چرا مثلث های BDE و ABD هم نهشت هستند؟ چرا هم مساحت اند؟
- ۳- چرا هرم های CBED و CBAD دارای حجم های برابرند؟
- ۴- چرا مثلث های DEF و ABC هم نهشت اند؟ چرا هم مساحت اند؟
- ۵- چرا $AD=CF$ ؟
- ۶- چرا هرم های CDEF و DABC دارای حجم های برابرند؟
- ۷- حجم های سه هرم CBED و CBAD و CDEF روی هم حجم چه شکلی را می سازند؟ حجم این شکل برابر با حاصل ضرب مساحت کدام مثلث در کدام پاره خط است؟
- ۸- حجم هر یک از این سه هرم برابر با چه کسری از حجم منشور است؟

حجم هر هرم، با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \pi R h$$

کار در کلاس



در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 1\text{cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و ارتفاع OH مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارت ها حجم هرم را به دست آورید. مساحت مثلث قائم الزاویه ACB را می توان از حاصل ضرب

اضلاع زاویه قائمه آن تقسیم بر دو به دست آورد :

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots \text{cm}^2$$

و از آنجا حجم هرم را به دست می آوریم :

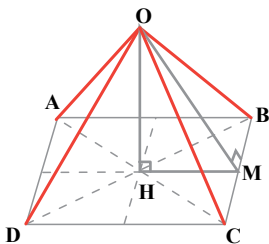
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \dots \times \dots = \dots \text{cm}^3$$

فعالیت

در شکل زیر هرم منتظم مربع القاعده OABCD رسم شده است که وجه های جانبی آن همگی مثلث هایی متساوی الساقین هستند و طول ساق های آنها ۱۰ cm است و M وسط BC می باشد.

۱- OM در مثلث OBC چگونه پاره خطی است و چه خواصی

دارد؟



۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد، به کمک قضیه

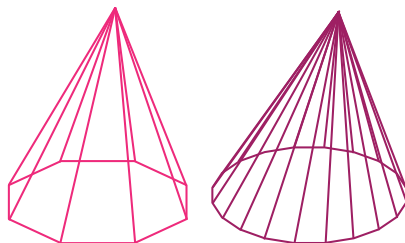
فیثاغورس، در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

۴- مثلث OMH چگونه مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید.

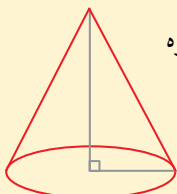
۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ... حال تعداد ضلع های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید. چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می شود؟



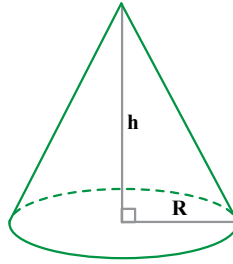
مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره

و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

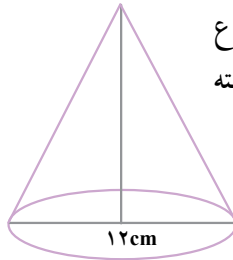
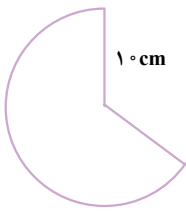


از اینجا نتیجه می‌شود که دستور حجم مخروط، مانند دستور حجم هرم است:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2h$$



کار در کلاس



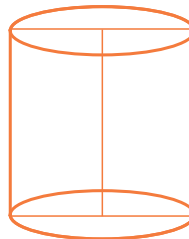
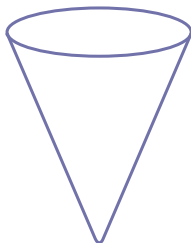
علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

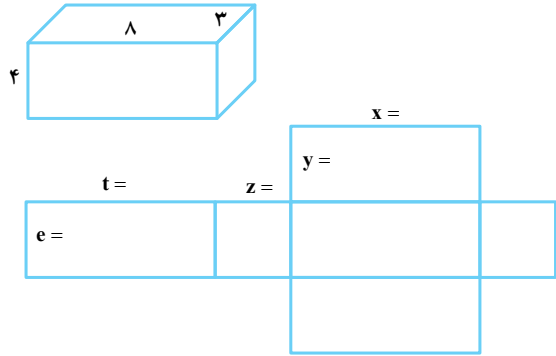
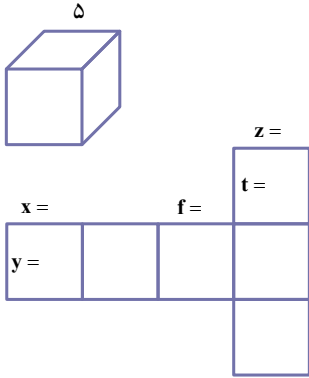
۲- حجم هرم مربع القاعده‌ای را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm بوده و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸ cm باشد.

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را پر از آب کرده و در لیوانی استوانه‌ای شکل که شعاع قاعده آن ۶ cm است خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

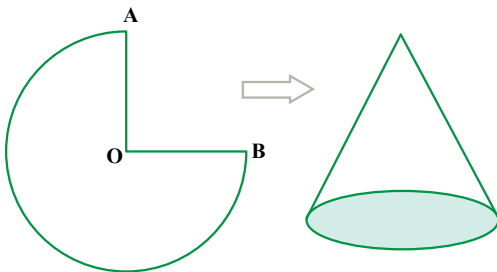
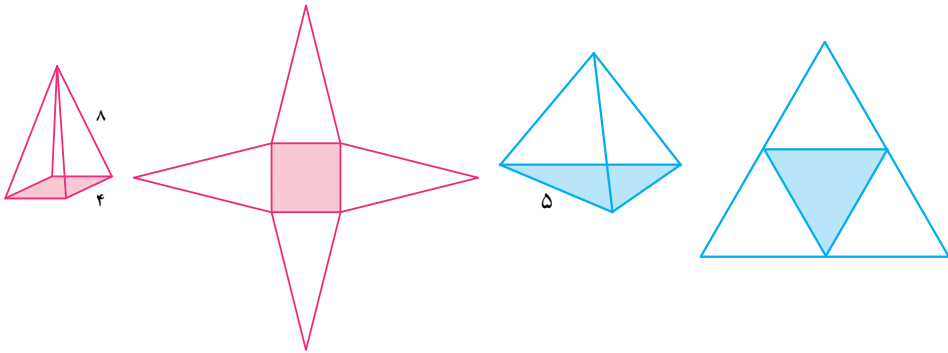


فعالیت

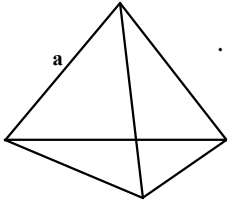
۱- در دوره دبستان با گسترده مکعب و مکعب مستطیل آشنا شده‌اید. با توجه به اندازه‌های مکعب و مکعب مستطیل اندازه ضلع‌های گسترده هر کدام را مشخص کنید.



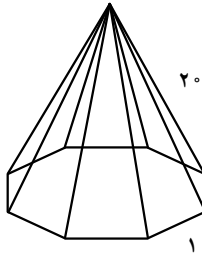
۲- مساحت گسترده هر م را با توجه به اندازه‌های روی حجم‌ها اندازه‌گیری کنید.



۳- $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر را برداشته‌ایم. با کمک آن یک سطح مخروط درست کرده‌ایم. طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

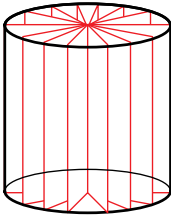


۱- با توجه به هرم مقابل، مساحت کل آن را بر حسب a به دست آورید.

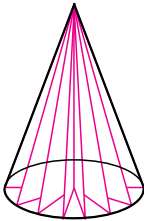


۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت کل هرم را پیدا کنید.

فعالیت

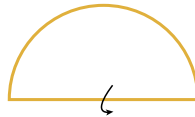
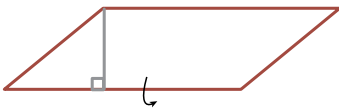


۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟
شعاع قاعده: ارتفاع:
حجم آن را پیدا کنید.

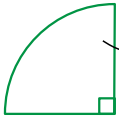


۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع آن دوران دهیم چه حجمی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید.
شعاع قاعده: ارتفاع:

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران حجم حاصل را مشخص کنید.



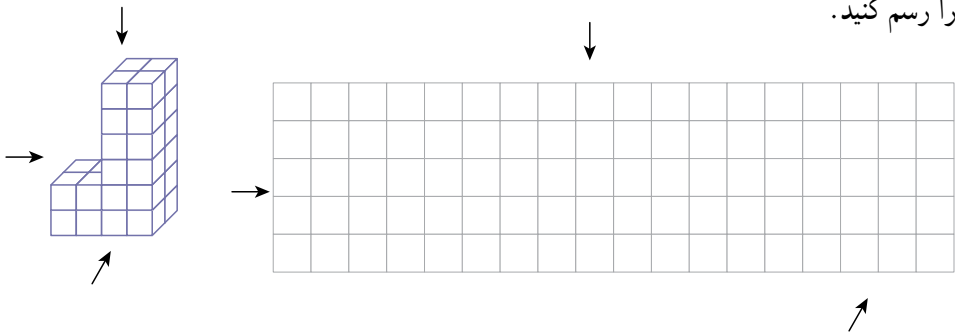
کار در کلاس



حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

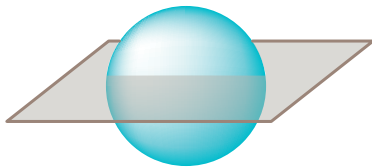
فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.

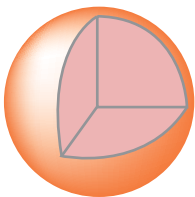


۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی ب) هرم منتظم با قاعده مربع ج) هرم منتظم با قاعده مثلث



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بزرگ ترین سطح خواهد شد؟



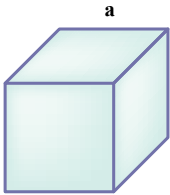
۴- در شکل مقابل چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

کار در کلاس

۱- یک مکعب اسفنجی به ضلع a را از روی قطر آن بریده ایم سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

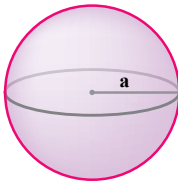
تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.



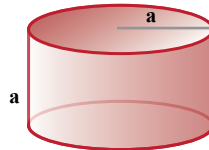
$$V =$$

$$S =$$



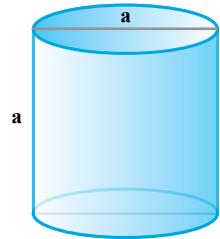
$$V =$$

$$S =$$



$$V =$$

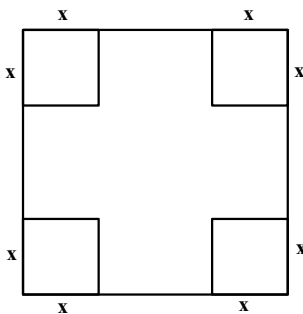
$$S =$$



$$V =$$

$$S =$$

در کدام یک با کمترین سطح حجم بیشتری ایجاد شده است؟



۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین x و a وجود داشته باشد تا بتوان ۴ کره به شعاع x را داخل این جعبه جای داد.