

فصل پنجم - بردار و مختصات

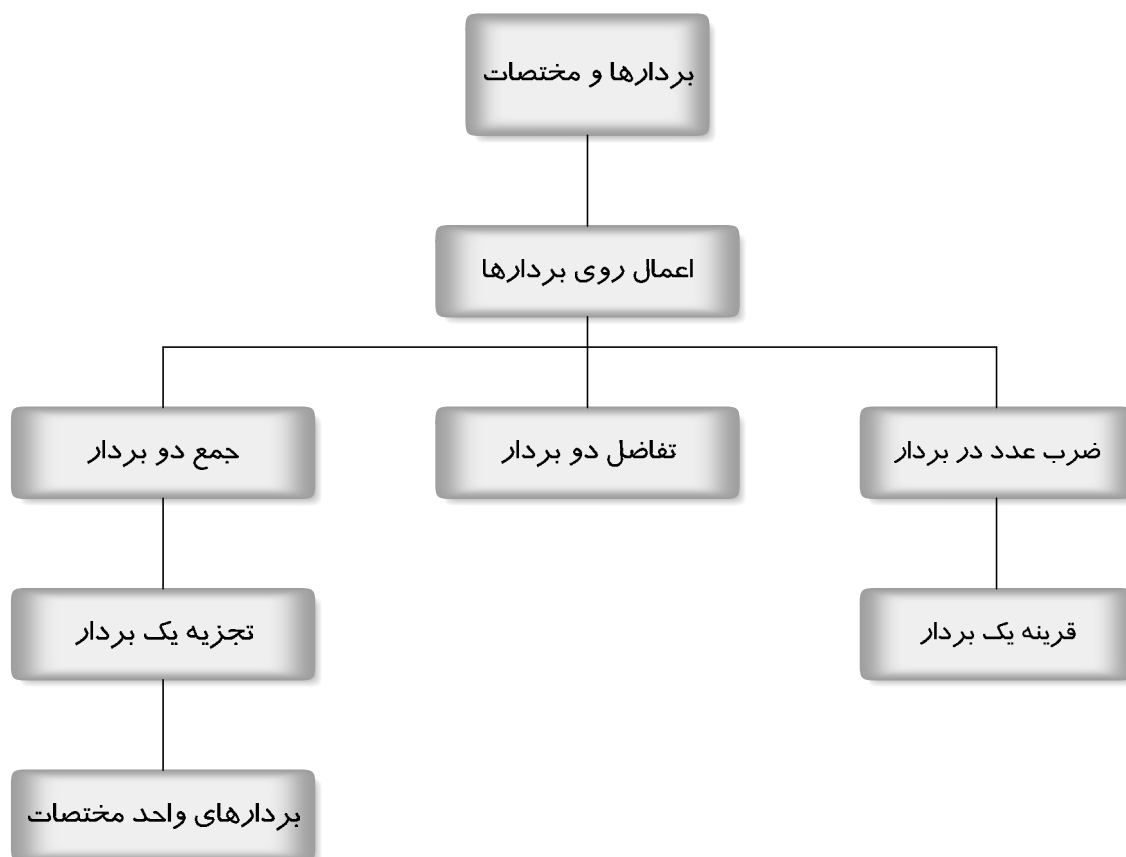
راهنمای معلم - ریاضی هشتم

نگاه کلی به فصل

در پایه هفتم بردار و مختصات را بررسی کردید. همچنین بردارهای مساوی، قرینه یک بردار و بردار انتقال تدریس شد. در سال هشتم ضمن معرفی بردارها به جمع دو یا چند بردار با هم پرداخته که به بردار حاصل جمع آنها بردار برآیند می‌گوییم. سپس یک بردار را روی دو راستای مشخص تجزیه می‌کنیم. در ادامه ضرب عدد در بردار را مطرح می‌کنیم و آخرین مبحث این فصل بردارهای واحد مختصات هستند که با استفاده از آنها می‌توان مختصات بردار را نمایش داد.

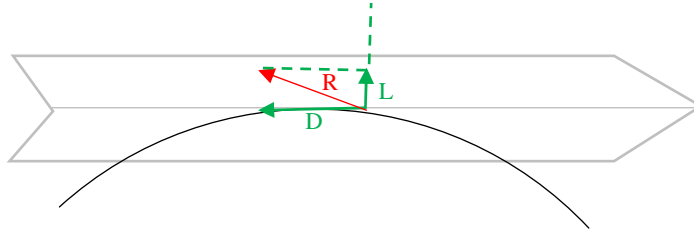
در ارائه مطالب این فصل ابتدا از دیدگاه هندسی استفاده می‌کنیم. سپس با توجه به دیدگاه هندسی، فرمول‌های جبری مربوط به بردارها را معرفی می‌کنیم. اگر دیدگاه‌های هندسی به صورت درست در ذهن دانش‌آموز نقش بندد در این صورت آنها می‌توانند از روی تصاویر هندسی، رابطه‌های جبری مربوط به بردارها را بنویسند و اگر زمانی رابطه‌های جبری را فراموش کنند، چون دیدگاه‌های هندسی شهودی هستند، با تصور آنها می‌توانند رابطه‌های جبری را خودشان بازنویسی کنند.

نقشه مفهومی

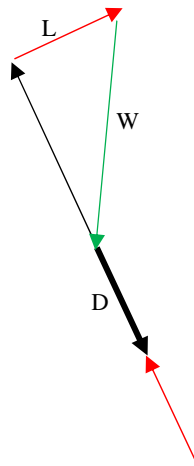


شرح تصویر عنوانی

وقتی موشکی روی مسیری در حال حرکت است و در هر لحظه بردار مماس بر مسیر حرکت موشک مانند R موجود است. چنانچه بردار R را روی راستای محور موشک و راستای عمود بر محور موشک تجزیه کنیم، بردارهایی مانند D (Drag) «پسا» و L (Lift) «برآ» به وجود می‌آیند. بردار L باعث بالا رفتن موشک و بردار D نیروهای مقاومت هوا در راستای محور موشک و مخالف جهت با حرکت موشک است.



در شروع فصل بهتر است از کاربرد بردار در مهندسی مکانیک و فیزیک صحبت کنید و بعد از تدریس برآیند دو یا چند بردار، صفحه نخست را دوباره مورد بازبینی قرار دهید و بردار برآیندی که باعث حرکت موشک می شود را محاسبه کنید.



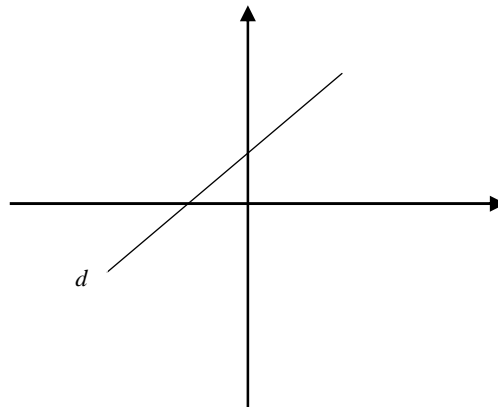
شروع نیروی پیشران

دانستنی هایی برای معلم

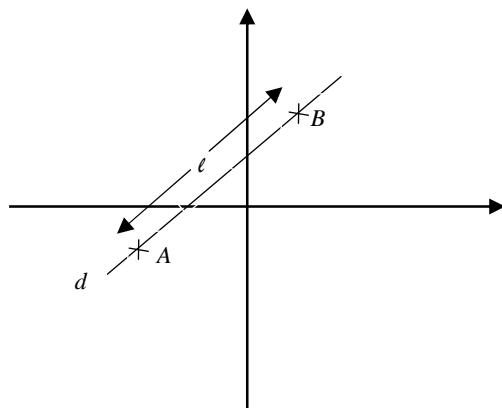
معرفی بردار

برای مشخص کردن هر بردار در صفحه مختصات، ابتدا خطی دلخواه مانند d

در صفحه رسم می کنیم:

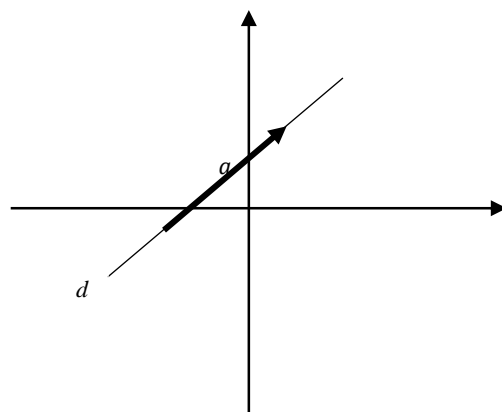


سپس روی این خط پاره خطی به طول مشخص در نظر می گیریم:



اکنون پاره خط جهتدار \overrightarrow{AB} را با ابتدا در A و انتها در B به نام بردار \vec{a} در نظر

می گیریم.



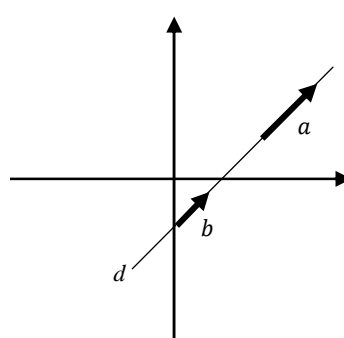
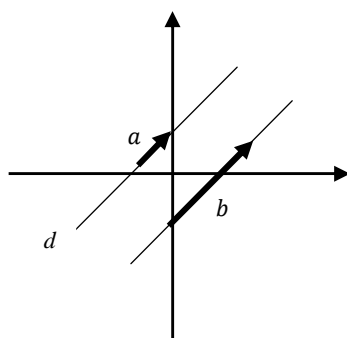
در این حالت به خط d راستای بردار a گفته می شود، بنابراین راستای بردار

خطی است که بردار بر آن خط واقع است.

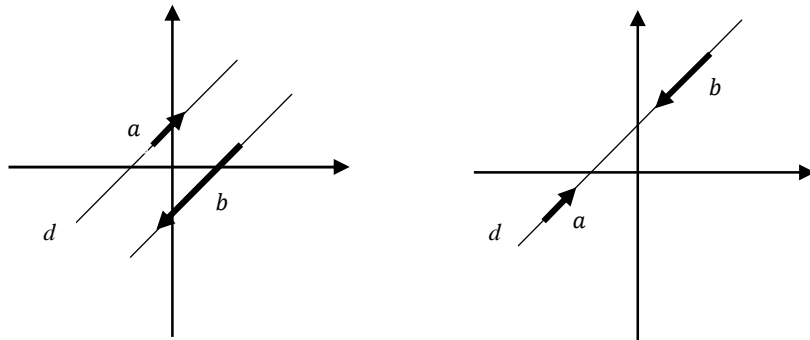
هر گاه دو بردار، هم راستا باشند، آن گاه آن‌ها روی یک خط یا روی دو خط

موازی قرار دارند.

a و b هم راستا و متحدالجهت



a و b هم راستا و مختلف‌الجهت



معرفی منابع برای معلمان

- خلاقیت ریاضی: تألیف جرج پولیا؛ ترجمه پرویز شهریاری؛ انتشارات فاطمی
- بردار (از سری کتاب های کوچک ریاضی) تألیف: سیدمحمد رضا هاشمی موسوی؛ انتشارات مدرسه.

جمع بردارها

هدف

- ۱- مفهوم برآیند دو بردار را به صورت هندسی درک کنند.
- ۲- یافتن رابطه مختصاتی را برای مجموع دو بردار.
- ۳- مفهوم بردارهای برابر را هم به صورت هندسی و هم به صورت جبری مختصاتی فرا بگیرد.
- ۴- برآیند سه یا چند بردار را محاسبه کند.
- ۵- درک مفهوم بردار صفر.
- ۶- تجزیه یک بردار روی دو راستای مشخص.

روش تدریس

جمع بردارها فعالیت صفحه ۷۰

در این فعالیت ابتدا با دیدگاه هندسی به بررسی حاصل جمع یا برابری دو بردار می‌پردازیم، سپس با مقایسه مختصات بردارهای c, b, a به این نتیجه می‌رسیم که مؤلفه اول بردار c به صورت حاصل جمع مؤلفه های اول دو بردار a و b است و مؤلفه دوم بردار c به صورت حاصل جمع مؤلفه های دوم دو بردار a و b است.

در انتهای سؤال ۴ این فعالیت پرسیده شده که:

در چه صورت برداری که از ابتدای a به انتهای b وصل می‌شود، بردار c حاصل جمع بردارهای a و b است؟ توضیح دهید.

پاسخ: اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد، در این صورت برداری که از ابتدای a به انتهای b وصل می‌شود، یعنی بردار c حاصل جمع بردارهای a و b است.

کار در کلاس ص ۷۱

با تعبیر هندسی بردار c وقتی می‌توان حاصل جمع دو بردار a و b باشد که دو شرط زیر برقرار باشد.

شرط اول: ابتدای b در انتهای a باشد (یا ابتدای a در انتهای b باشد).

شرط دوم: ابتدای بردار c در ابتدای بردار a و انتهای بردار c در انتهای بردار b

b باشد؛ $c = a + b$ (یا ابتدای c در ابتدای b و انتهای c در انتهای a باشد؛ $c = b + a$)

فعالیت ص ۷۱

در سؤال ۲ با مطالعه راه حل های امیررضا متوجه می شویم که جمع بردارها خاصیت جابجایی دارند.

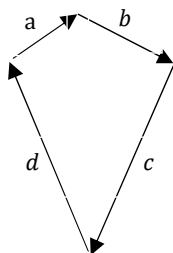
در سؤال ۴ این فعالیت، مریم به طور هم زمان راه حل های فاطمه و زهرا را به کار برده است و راه حل مریم همان حاصل جمع دو بردار به روش متوازی الاضلاع است.

کار در کلاس ص ۷۲

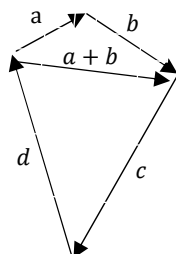
در این فعالیت ضمن یادآوری بردار قرینه که در ریاضی هفتم موجود است، بردار صفر را به صورت حاصل جمع هر بردار با بردار قرینه اش نشان داده است.

در انتهای سؤال ۲، ملاحظه می کنید که $a + b + c = 0$ یعنی بردار صفر می تواند حاصل جمع سه بردار باشد.

در شکل زیر ملاحظه می کنید که: $a + b + c + d = 0$

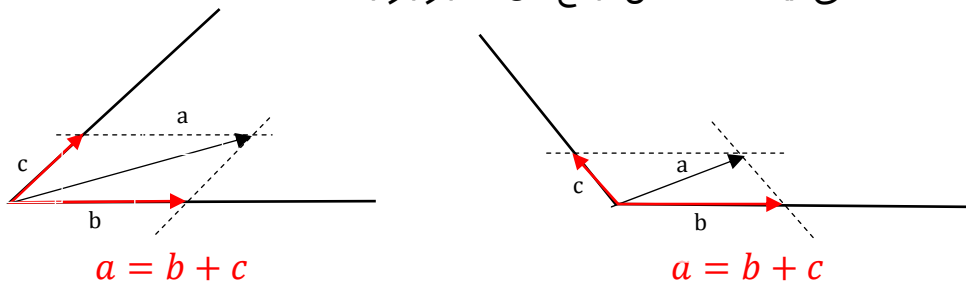


زیرا بردار $(a + b) + c$ قرینه بردار d است.



فعالیت ص ۷۳

۱- برای تجزیه بردار a روی خطهای آبی که در این فعالیت داده شده‌اند، باید از انتهای a دو خط موازی با خطها یا راستاهای آبی رنگ رسم کنیم. در این صورت دو بردار به دست می‌آید که حاصل جمع آن‌ها برابر با a است.



۲- سئوالی باز پاسخ است که بی شمار پاسخ درست دارد.

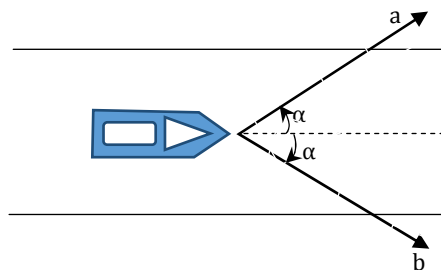
در این جا باید تأکید کنیم که همه جواب‌های ممکن درست هستند و این برخلاف ذهنیت عمومی دانش‌آموزان است که تصور می‌کنند؛ مسائل ریاضی فقط یک جواب درست دارند.

در این فعالیت از دیدگاه جبری $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$ ؛ به این نتیجه هندسی می‌رسیم که هر بردار مانند $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را می‌توان به تعداد بی شمار حالت تجزیه کرد.

حل بعضی از تمرین‌ها

تمرین ۱ صفحه ۷۳

در قسمت الف، بردارهای a و b هم طول هستند و هر دو بردار با راستای افقی



زوایای یکسان دارند.

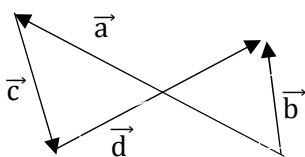
در این قسمت اگر صلاح دیدید، جریان آب را هم در نظر بگیرید و بحث کنید.
سپس جواب های ممکن را با مشارکت دانش آموزان به دست آورید.

توصیه های آموزشی

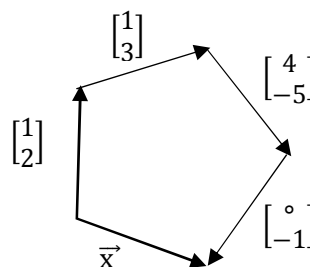
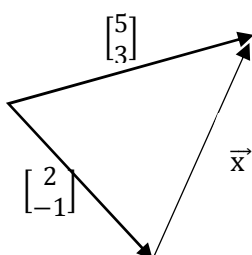
- ۱- قبل از ورود به درس بعدی بهتر است با دوره های از سال گذشته، مفاهیم راستا و جهت را برای بردار یادآوری کنید.
- ۲- مفهوم دو بردار مساوی (برابر) را از سال گذشته یادآوری می نماید.
- ۳- فرض کنید \vec{a} و \vec{b} دو بردار و r و s دو عدد حقیقی باشند، برای محاسبه و تعبیر هندسی بردار $r\vec{a} + s\vec{b}$ در درس بعدی باید دانش آموزان مفهوم برابری دو بردار را به خوبی فرا گرفته باشند.

نمونه سئوالات ارزشیابی

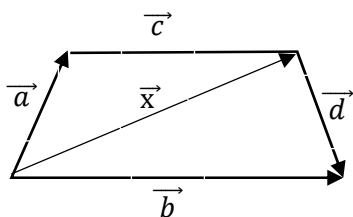
- ۱- اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4x + 8 \\ x + 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ هم اندازه، هم جهت و هم راستا باشند در این صورت مختصات بردار \vec{b} را پیدا کنید.
- ۲- اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2m - 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4m + 9 \\ -n \end{bmatrix}$ هم اندازه، هم راستا ولی مخالف جهت هم باشند، در این صورت مختصات بردارهای \vec{a} و \vec{b} را پیدا کنید.



۳- کدام بردار حاصل جمع دو بردار دیگر است.



۵- با توجه به شکل زیر بردار x را به چند صورت می توان نوشت:



۶- اگر O مبدأ مختصات و داشته باشیم $\vec{OP} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\vec{MN} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

در این صورت مختصات بردار \vec{OM} را بیابید. $\vec{PN} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

ضرب عدد در بردار

هدف

- ۱- درک ضرب عددی مثبت در یک بردار (تعبیر هندسی)
- ۲- درک ضرب عددی منفی در یک بردار (تعبیر هندسی)
- ۳- رابطه ی مختصاتی ضرب عدد در بردار را بنویسند.
- ۴- دو بردار هم راستا و هم جهت و غیر هم جهت را بشناسد.
- ۵- حاصل جمع یا برابند مضارب بردارها را محاسبه کند.

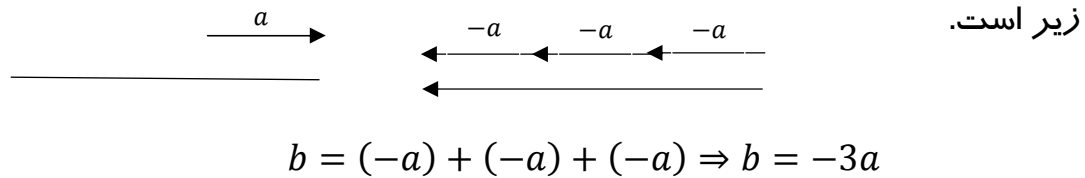
روش تدریس

فعالیت ص ۷۴

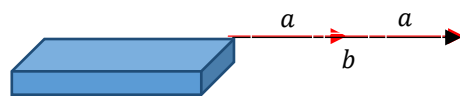
در این فعالیت با توجه به دیدگاه های هندسی که از سؤال های ۱ و ۲ بدست

می آید، عبارتهای جبری متناظری برای ضرب عدد در بردار می نویسیم.

۱- بردار انتقال خودرو در شکل نشان داده شده است، اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کرده باشد بردار انتقال آن به صورت



۲-



$$b = a + a \Rightarrow b = 2a$$

۳- اگر a یک بردار باشد در این صورت برای هر $k \in R, k \neq 0$ ، بردار ka را ضرب عدد k در بردار a می‌گوییم و داریم:

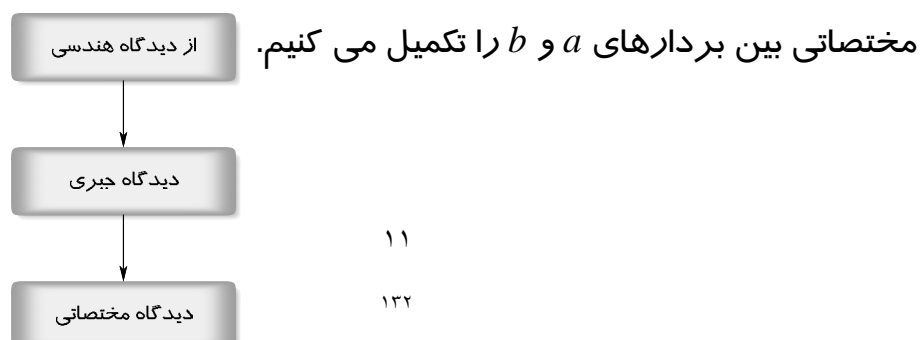
الف) هرگاه $k > 0$ در این صورت بردار ka هم راستا و هم جهت با بردار a است.

ب) هرگاه $k < 0$ در این صورت بردار ka هم راستا و مختلف‌الجهت با بردار a است.

ج) اگر $k > 1$ یا $k < -1$ در این صورت طول بردار ka از طول بردار a بزرگتر است.

د) اگر $0 < k < 1$ یا $-1 < k < 0$ در این صورت طول بردار ka از طول بردار a کوچکتر است.

۴- در این قسمت، ابتدا با دیدگاه هندسی نسبت به بردارهای a و b یک رابطه جبری برای مقایسه این دو بردار به کار می‌بریم، سپس به کمک آن رابطه



توجه: در پایان این فعالیت، قرینه یک بردار را به صورت حاصل ضرب عدد (-۱) در بردار معرفی کرده است.

یعنی هر گاه a یک بردار باشد در این صورت $-1 \times a$ را قرینه بردار a می‌گوییم و داریم:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow -1 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

یعنی از دیدگاه مختصاتی، برای این که قرینه بردار a را به دست آوریم، کافی است، مختصات بردار x را قرینه کنیم.

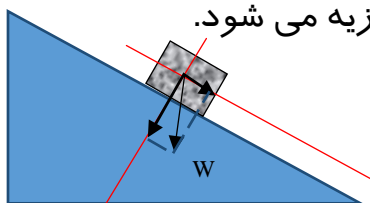
فعالیت ص ۷۵

توجه: در این فعالیت دو مفهوم جمع دو بردار (برایند بردار) و ضرب عدد در بردار باهم ترکیب می‌شوند.

حل بعضی از تمرین‌ها

تمرین ۳ ص ۷۷

معمولاً در درس فیزیک از دانش آموزان می‌خواهند که نیروی وزن را تجزیه کنند، در این تمرین، نیروی وزن جعبه روی دو راستا که یکی موازی با سطح شیب‌دار و دیگری عمود بر سطح شیب‌دار است، تجزیه می‌شود.



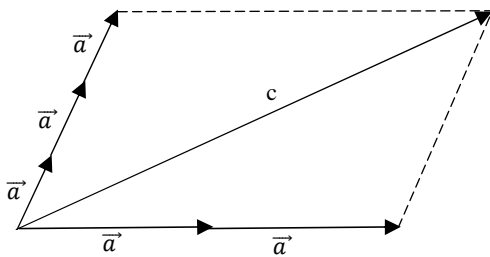
برای این منظور از انتهای بردار w خط‌هایی عمود بر دو راستا فرود می‌آوریم.

توصیه های آموزشی

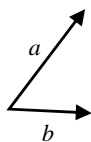
مهم ترین توصیه در این درس این است که مفهوم جمع دو یا چند بردار و مفهوم ضرب یک عدد در بردار با هم ترکیب می شوند و دانش آموزان باید بتوانند ترکیب این دو مفهوم را هم به صورت هندسی و هم به صورت جبری مختصات تعبیر کنند.

نمونه سئوالات ارزشیابی

۱- بردار c را برحسب بردارهای \vec{a} و \vec{b} بنویسید.



۲- بردارهای \vec{a} و \vec{b} را به صورت زیر در نظر بگیرید. سپس بردار



$\vec{c} = -2b + \frac{1}{2}a$ را رسم کنید.

۳- با توجه به رابطه های زیر، مقادیر x و y را بیابید.

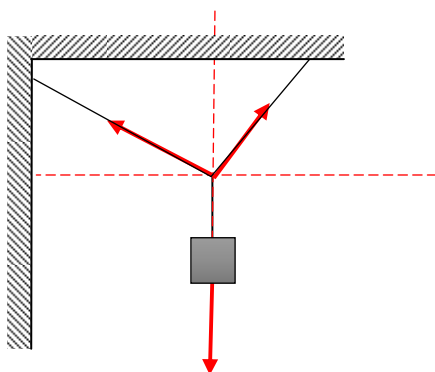
$$\text{الف) } -2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } x \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۴- مختصات بردار \vec{x} را با توجه به معادله برداری زیر بدست آورید.

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- ۵- وزنه زیر توسط دو طناب در حال تعادل است، نیروهای مشخص شده روی شکل را در راستاهای داده شده، تجزیه کنید.



بردارهای واحد مختصات

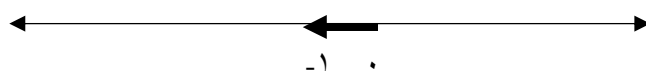
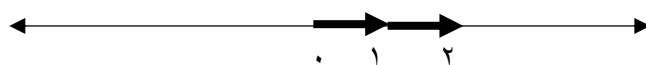
هدف

- ۱- درک هندسی بردارهای واحد دستگاه مختصات.
- ۲- درک مختصاتی بردارهای واحد مختصات.
- ۳- هر بردار را بتواند به صورت ترکیبی از بردارهای واحد بنویسد.
- ۴- حل معادله های برداری.

روش تدریس

فعالیت ص ۷۸

- ۱- پاسخ به سؤال ۱، نیاز به وجود بردار واحد احساس می شود.
- ۲- در این قسمت بردار واحد محور مختصات نشان داده شده است، سپس به کمک این بردار واحد می توان عددهای ۱ و ۲- را به صورت زیر روی محور مشخص کرد.



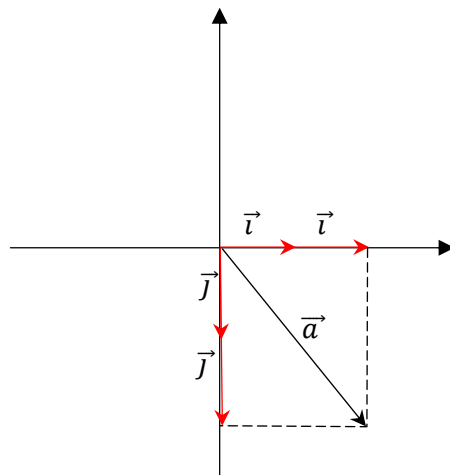
۳- در این جا با استفاده از دیدگاه هندسی که برای بردارهای \vec{i} و \vec{j} به دست آوردیم، مختصات هر کدام از آن‌ها را با توجه به مختصات انتهای این بردارها می‌نویسیم.

در ادامه این فعالیت می‌خواهیم نشان دهیم که هر بردار را می‌توان به دو صورت نمایش داد.

نمایش اول بردار با مختصات و نمایش دوم بردار، با استفاده از بردارهای واحد مختصات هستند.

کار در کلاس ص ۷۹

در این قسمت می‌خواهیم نشان دهیم که هر بردار را می‌توان روی محورهای مختصات تجزیه کرد و با استفاده از آن مختصات بردار را نوشت.



$$a = 2i - 2j = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

فعالیت ص ۷۹

در سوال ۲، اصطلاح «معادله برداری» مطرح شده است، معادله برداری به معادله‌ای گفته می‌شود که مجهول در آن یک بردار باشد و هدف از حل این معادله، پیدا کردن برداری باشد که در معادله صدق کند.
سعید و حمید، دو راه متفاوت بردار مجهول را به دست آورده‌اند.

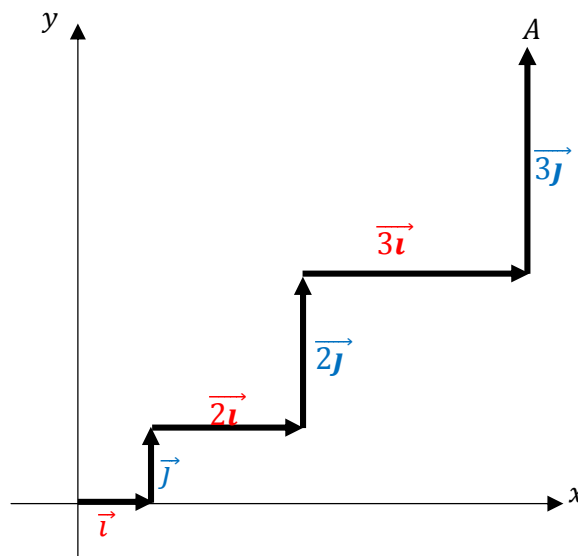
حل بعضی از تمرین‌ها

تمرین ۶ ص ۸۱

بعد از شش حرکتی که روی شکل مشخص شده است بردارهایی که با محور x موازی هستند باهم و بردارهایی که با محور y موازی هستند، باهم جمع کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} + 2\vec{i} + 3\vec{i} = (1 + 2 + 3)\vec{i} = 6\vec{i} \\ \vec{j} + 2\vec{j} + 3\vec{j} = (1 + 2 + 3)\vec{j} = 6\vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 \\ 1 + 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$



با مشاهده ۱۰ حرکت اگر این روبات به نقطه B برسد، در این صورت ۵ بار در راستای محور x ها و ۵ بار در راستای محور y ها مانند الگو جابجا شده است و مختصات نقطه B به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ توجه:}$$

در صورت لزوم و بنابر صلاح دید خودتان می توانید مختصات نقطه ای را که روبات پس از $2n$ حرکت به آن رسیده به صورت زیر بنویسید.

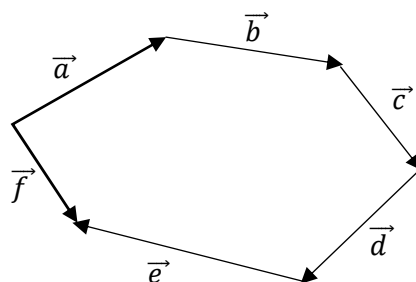
$$\begin{bmatrix} 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ 1 + 2 + 3 + \dots + n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix}$$

چنان چه روبات $(2n + 1)$ حرکت کرده باشد، مختصات نقطه پس از این

$(2n + 1)$ حرکت به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix}$$

تمرین ۷ صفحه ۸۱



$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

با توجه به شکل بالا، ملاحظه می کنید که اندازه بردار f از اندازه های همه

بردارها کوچکتر است.

تمرین ۸ صفحه ۸۱

این خودرو در کل به اندازه ۲۸ واحد حرکت کرده است. در این حالت طول بردارها را با هم جمع می‌کنیم و کل مسافت پیموده شده را محاسبه می‌کنیم. این خودرو در راستای عمودی ۲ واحد به پایین جابه‌جا شده است یعنی بردار جابجایی یا انتقال خودرو $\vec{-2j}$ است. در این حالت برابری حاصل جمع بردارها را مشخص می‌کنیم.

نمونه سئوالات ارزشیابی

۱- کدام بردار با بقیه بردارها موازی نیست؟

$$\vec{b} = \vec{j} + 6\vec{i} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{d} = -9\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \quad (\text{د})$$

$$\vec{c} = -\frac{9}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} \quad (\text{ج})$$

۲- اگر بردارهای $\vec{a} = (k-2)\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - (5+n)\vec{j}$ هم راستا ولی

غیرهم جهت باشند در این صورت مقادیر k و n را بیابید.

۳- هرگاه $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$ نیز داشته باشیم

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \quad \text{در این صورت حاصل } m+n \text{ را پیدا کنید.}$$

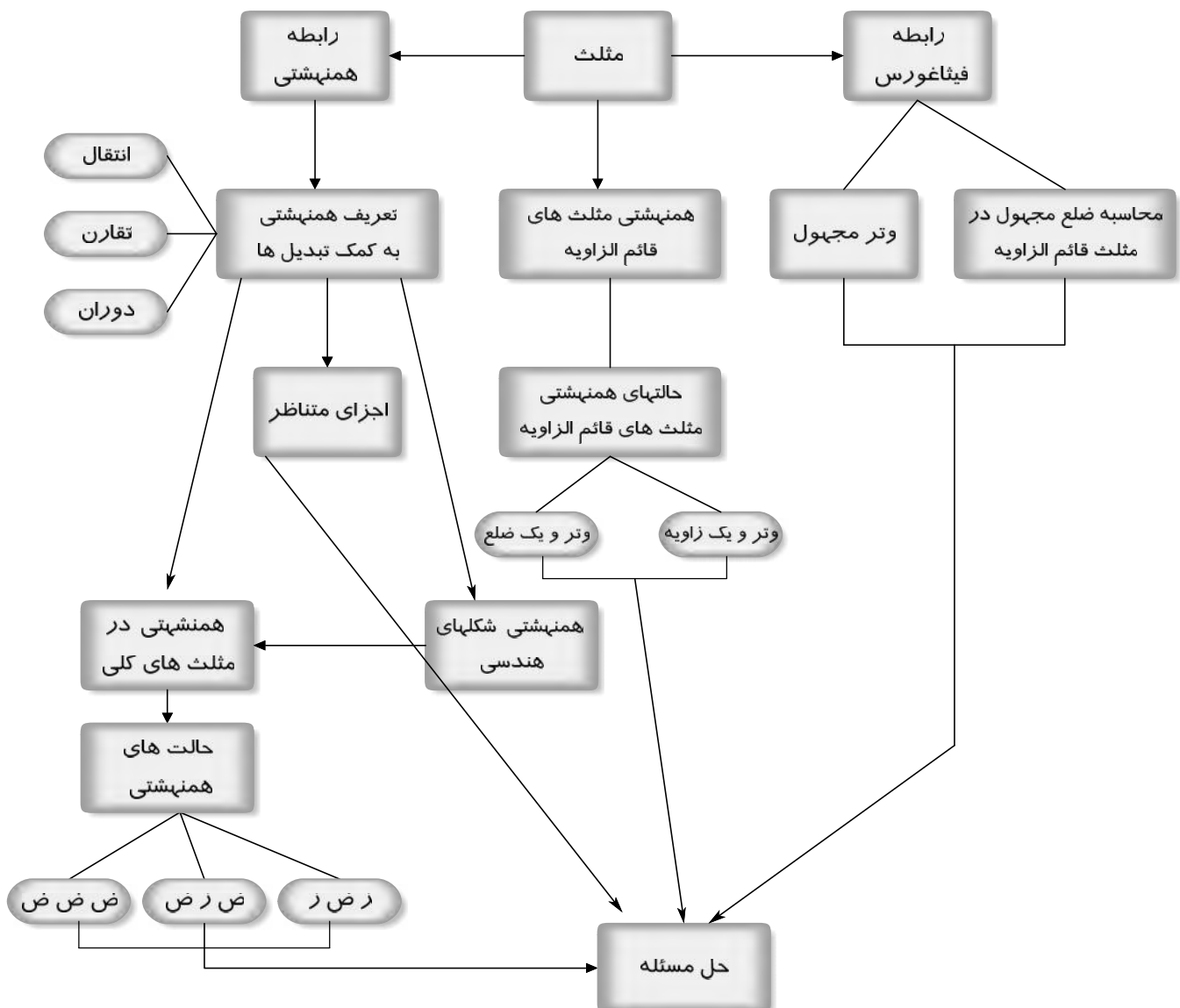
۴- در معادله $-\vec{3x} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\vec{i} = -5\vec{j}$ ، مختصات بردار \vec{x} را پیدا کنید.

راهنمای معلم - راضی

نگاه کلی به فصل

مطالب این فصل با آموزش رابطه‌ی فیثاغورس و کاربرد آن شروع می‌شود. سپس با استفاده از تبدیل‌های هندسی که دانش آموزان در سال گذشته یاد گرفته‌اند موضوع نهشتی در شکل از جمله هم نهشتی دو مثلث مطرح می‌شود. براساس آن سه حالت هم نهشتی دو مثلث و تعدادی حالت که دو مثلث هم نهشتی نخواهند شد بررسی می‌شود. در آخرین درس این قسمت حالت‌های هم نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه مطرح و چند نمونه مسئله حل می‌شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

دقت در اشیاء ، پدیده ها و اتفاقات پیش روی انسان همواره راه‌گشا به سوی فهم و درک بیشتر انسان می باشد. در حل مسائل ریاضی نیز یکی از اساسی‌ترین مهارت‌ها که به پیشبرد فرآیند حل مسئله کمک می کند دقت و تیزبینی جوانب مختلف موضوع می باشد. آیه مذکور به همین موضوع اشاره دارد و برای نمونه یک تصویر از طبیعت و یک فرکتال ساخته دست انسان برای مشاهده و مقایسه آورده شده است.

دانستنی هایی برای معلم

مسیرهایی برای توسعه

دانش آموزان در فصل ۳ کتاب درسی با خاصیت های چهارضلعی‌های خاص آشنا شده‌اند. در این فصل نیز ابزاری برای اثبات برابری دو مثلث و به تبع آن اجزای متناظر آن‌ها در اختیارشان قرار گرفته است. یکی از مسیرهای توسعه مفاهیم این فصل می تواند به کارگیری این ابزار برای اثبات خاصیت های چهارضلعی‌ها باشد. مسأله‌های زیر با این هدف در اینجا آمده‌اند.

• به کمک تعریف هر چهارضلعی، ارتباط میان زاویه ها و حالت های تساوی

مثلث‌ها ثابت کنید:

الف) قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند.

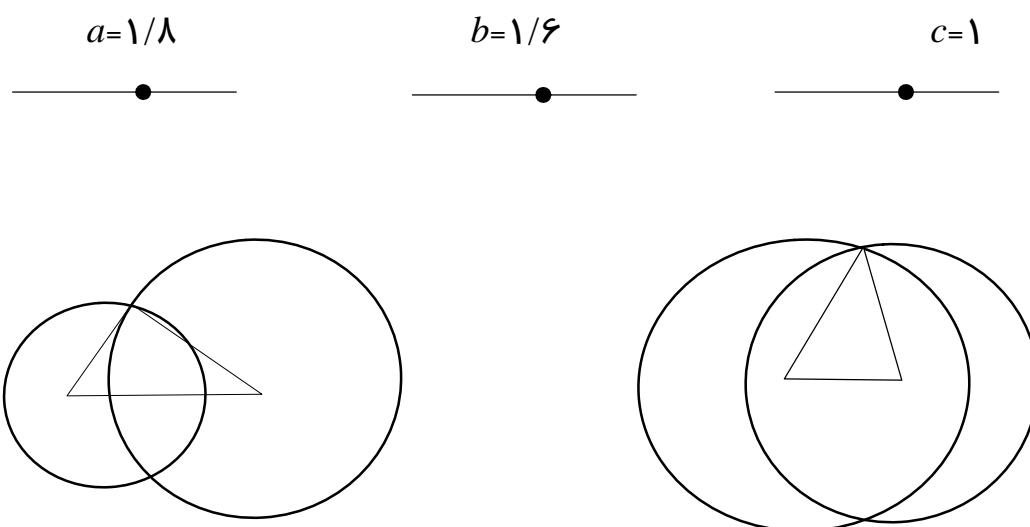
ب) ثابت کنید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

ج) قطرهای مربع بر هم عمودند.

استفاده از ابزار های فن آورانه

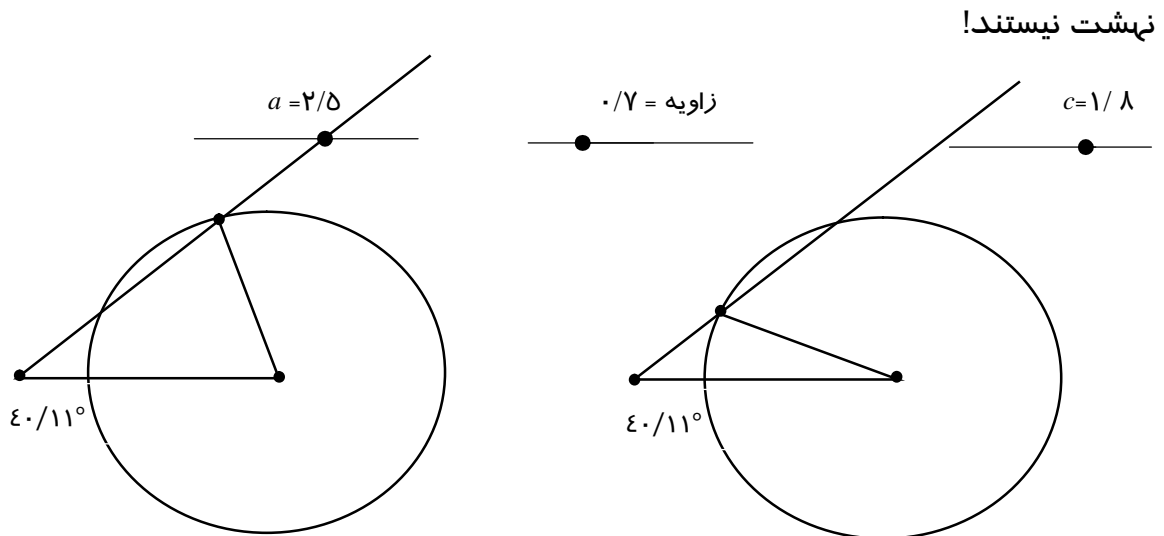
۱- در کتاب درسی، سه حالت هم نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم نهشتی مثلث‌های قائم الزاویه آمده است. یکی از روش‌های متقاعد کردن دانش آموزان برای قبول هر یک از این حالت‌ها، رسم مثلث‌هایی با داده‌های یکسان در آن حالت روی کاغذ، منطبق کردن مثلث‌ها روی هم و مشاهده هم نهشتی آن‌هاست. محیط نرم‌افزار *GeoGebra* با قابلیت‌هایی که دارد این امکان را برای دانش آموزان فراهم می‌کند که مثلث‌های مورد نظر را رسم نمایند و هم نهشتی آن‌ها را بررسی کنند. ضمن آن که پویایی شکل‌ها امکان تکرار آزمایش با داده‌های دیگر را به سادگی و به سرعت ایجاد می‌نماید.

در شکل زیر دو مثلث با سه ضلع مساوی با دو ترتیب مختلف رسم شده‌اند. به کمک لغزنده‌ها می‌توان اندازه ضلع‌های هر دو مثلث را هم‌زمان نظیر به نظیر تغییر داد و با کمک ابزار بررسی ارتباط دو شیء، می‌توان هم نهشتی این دو مثلث را بررسی کرد.



۲- آزمایش حالت هایی در رسم مثلث که لزوماً به یک مثلث یکتا منجر نمی‌شوند نیز یکی دیگر از تجربه هایی است که به سادگی در محیط نرم افزار *GeoGebra* ممکن می‌شود.

در شکل زیر مثلث ها با داشتن دو ضلع و زاویه غیربین رسم شده اند و هم

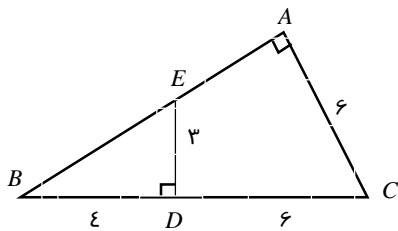


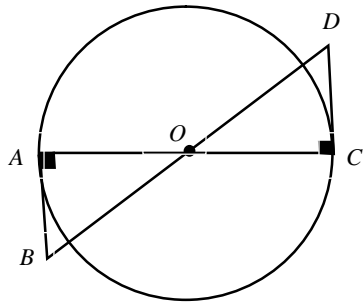
معرفی منابع برای معلمان:

- ریاضیات برای معلمان: تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی.ال.مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل ۱۶
- اثبات بدون کلام؛ تألیف راجر. ب.نلسن؛ ترجمه سپیده چمن آرا؛ انتشارات فاطمی؛ فصل ۱

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱- اندازه پاره خط AE را به دست آورید.

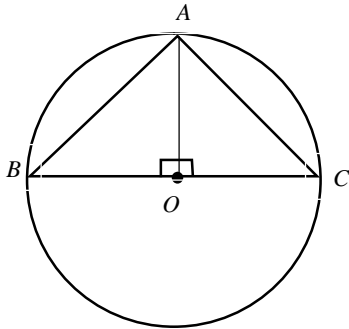




۲- دلیل هم نهشتی دو مثلث را بیان کنید.

مثلث $\triangle OAB$ با کدام تبدیل هندسی به مثلث

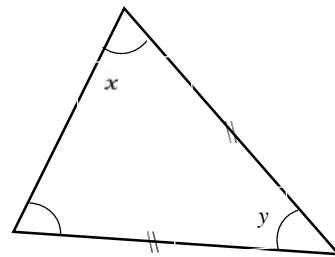
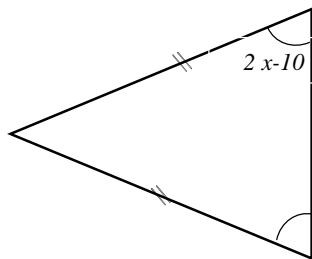
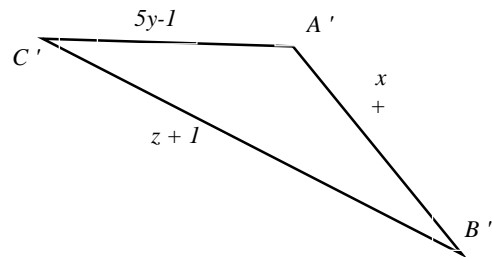
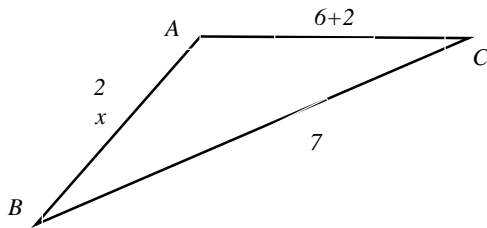
ODC منطبق می شود؟



۳- نقطه ی O مرکز دایره است دلیل هم نهشتی

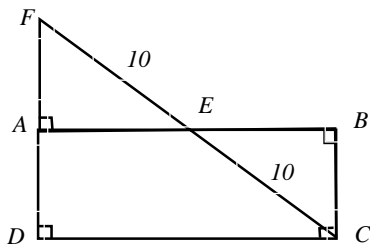
دو مثلث را بیان کنید.

۴- با توجه به هم نهشت بودن مثلث ها اندازه زاویه ها و ضلع را پیدا کنید.



۵- با توجه به اندازه های مشخص شده و طول ضلع های مثلث DFC را پیدا کنید.

دلایل کارهای خود را توضیح دهید.



رابطه فیثاغورس

هدف

- ۱- با انجام فعالیت های داده شده رابطه ی فیثاغورس را کشف و درک کند.
- ۲- در تشخیص و بیان رابطه ی فیثاغورس در حالت های مختلف مثلث قائم الزاویه تسلط یابد.
- ۳- در حل مسائل بتواند از رابطه فیثاغورس استفاده کند و با تعدادی از کاربردهای آن آشنا شود.
- ۴- در هر مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع بتواند اندازه ضلع سوم را بدست آورد.
- ۵- با داشتن اندازه های سه ضلع مثلث بتواند قائم الزاویه بودن یا نبودن آنرا تشخیص دهد.

ابزار مورد نیاز

- ۱- شکل های مربوط به فعالیت ها
- ۲- خط کش، گونیا و نقاله

روش تدریس

در قسمت اول فعالیت اول با توجه به صفحه شطرنجی و خطوطی که برای کمک به شمارش مربع ها، درون شکل ها کشیده شده است و با توجه به جداول ارائه شده انتظار می رود دانش آموز قبل از معرفی صریح رابطه فیثاغورس بتواند حداقل وجود نوعی رابطه بین اندازه های اضلاع مثلث قائم الزاویه را احتمال دهد.

در قسمت دوم فعالیت اول نیز با ساختن شکل هایی نظیر آنچه داده شده است و جابجایی قطعه ها بگونه ای که با تکه های موجود در دو مربع ایجاد شده روی دو ضلع زاویه قائمه، مربع ایجاد شده روی وتر کاملاً پوشانده شود تعمیق و درک بهتر رابطه ی فیثاغورس در ذهن دانش آموزان مدنظر می باشد. در قسمت آخر هم رابطه فیثاغورس در کنار شکل مثلث قائم الزاویه مربوطه آمده است تا کاربرد آن در حل مسائل توسط دانش آموزان را تسهیل نماید.

درباره ی روش اثبات ابوالعباس نیریزی، دانشمند ایرانی، برای اثبات قضیه فیثاغورس، گرچه در این روش هم با جابجایی دو مثلث سبز و زرد برابری مساحت های مورد نظر کاملاً قابل مشاهده است ولی آنچه بیشتر مد نظر می باشد، معرفی این دانشمند ایرانی است. چنین نمونه هایی می تواند در دانش آموزان حس غرور ملی و مذهبی را برانگیزد و از ریشه دواندن ناخودآگاه این تفکر که، همواره تنها استفاده کننده از علوم دیگر کشورهای جهان بوده ایم در ذهن آنها جلوگیری نماید. می توانید از دانش آموزان بخواهید تحقیق هر چند مختصر در مورد زندگی و آثار این دانشمند ایرانی انجام داده و آنرا ارائه دهند.

در ادامه ی این فصل کاربرد قضیه فیثاغورس در حل مسائل مورد توجه قرار دارد. با ارائه ی مسائلی که ضلع مجهول وتر و یا یکی از اضلاع زاویه قائمه باشد و نیز

با ارائه‌ی مسائلی که دانش آموز باید چندین بار رابطه‌ی فیثاغورس را بکار ببرد تا اندازه‌ی ضلع مجهول را بیابد سعی شده تسلط دانش آموز را بر استفاده از این رابطه زیاد نمود و این رابطه به عنوان یکی از ابزارهای کارا در حل برخی مسائل در ذهن دانش آموز تثبیت شود.

توصیه های آموزشی

۱- در فعالیت ها سعی شده است با قطعه قطعه مشخص کردن مربع ها و یا با استفاده از رنگ های مختلف درک چگونگی برابری مساحت های مورد نظر برای دانش آموزان آسان تر شود. با این حال در صورت لزوم با توضیح بیشتر می توانید به ایجاد درک بهتر کمک نمایید.

۲- دانش آموز در محاسبات مسائلی که در آنها از رابطه ی فیثاغورس استفاده می شود ممکن است با جذر اعداد مختلفی مواجه شود. دقت کنید که در این حالات بدست آوردن مقدار عدد بصورت تقریبی که در سال هفتم آموخته اند کافی است و در صورتی که مقدار دقیق را بخواهند می توانند از ماشین حساب استفاده نمایند.

بدهمی های رایج دانش آموزان

برخی دانش آموزان پس از نوشتن رابطه فیثاغورس در جایگذاری اندازه های اضلاع دچار اشتباه می شوند و این مسئله حاکی است که متفاوت بودن نقش وتر در این رابطه بر ایشان مشخص نشده است.

شکل های همپهشت

هدف

- ۱- درک مفهوم همپهستی و قابل انطباق بودن دو چند ضلعی
- ۲- تشخیص اجزای متناظر در دو چند ضلعی همپهشت
- ۳- بداند تبدیل یافته های هر چند ضلعی تحت انتقال، تقارن یا دوران، همواره با آن چندضلعی همپهشت است.
- ۴- مرور و تسلط بیشتر در استفاده از تبدیل های انتقال، تقارن و دوران که در سال هفتم با آنها آشنا شده است.

ابزار مورد نیاز

خط کش

نقاله

گونیا

انواع چند ضلعی ها که با کاغذ درست شده باشد

روش تدریس

در این قسمت اثبات همپهستی دو چند ضلعی خواسته نشده است و آنچه مدنظر می باشد درک مفهوم «همپهستی» و یا «قابل انطباق بودن» شکلها، تشخیص اجزای متناظر در دو شکل همپهشت و بالابردن توان ذهنی دانش آموزان در بکارگیری تبدیل های هندسی جهت تشخیص چگونگی قابل انطباق بودن دو شکل می باشد. فراهم کردن ابزارهایی مناسب از قبل، مثلاً چندضلعی های همپهشت

مقوایی که از قبل آماده کرده اید و نمایش اینکه با مرحله به مرحله استفاده کردن از تبدیلات چگونه دو چندضلعی برهم منطبق می شوند، می تواند کم کم توان ذهنی دانش آموزان را در این زمینه و در تشخیص اجزای متناظر از دو چند ضلعی افزایش دهد. گرچه در کتاب هفتم و نیز در فصل سه (چندضلعی‌ها) دانش آموز با تبدیل‌های انتقال، تقارن و دوران آشنا شده است، با این حال در برخی مسائل استفاده از راه کارهایی که گفته شد و نیز استفاده از کاغذ پوستی و صفحه ی شطرنجی می تواند به یادگیری بیشتر دانش آموزان کمک کند.

حل بعضی از تمرین ها

۱- مثلث های (ب) و (د) و (هـ) و (ر) و (ح) و (ی) و (ک) با توجه به اندازه های اضلاع آنها (که با توجه به صفحه شطرنجی مشخص شده اند) و با توجه به برابری زاویه‌های آنها (که با رنگ های یکسان مشخص شده‌اند) و نیز با توجه به صفحه‌ی شطرنجی، قابل انطباق بودنشان توسط تبدیل ها مشخص می شود.

$(الف) \xleftarrow{\text{دوران}} (ر) \xleftarrow{\text{تقارن}} (ح) \xleftarrow{\text{انتقال}} (ی) \xleftarrow{\text{تقارن}} (ک)$

۲- در شکل سمت چپ با توجه به دوران گفته شده زوایای E و H بر هم منطبق خواهند شد، I و F بر هم منطبق خواهند شد و دو زاویه G در دو شکل بر هم منطبق خواهند شد لذا داریم:

$$\hat{H} = \hat{E} = 40^\circ$$

$$x + 25 = x - 20 \rightarrow x = 45 \rightarrow G = 70^\circ$$

$$\hat{F} = \hat{I} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$$

توصیه های آموزشی

همانگونه که دیده می شود در این بخش مواردی از شکل های همپهشتی که مثلث نباشند نیز استفاده شده است تا مفهوم تناظر اجزاء دو شکل همپهشت در حالت کلی در ذهن دانش آموز قرار گیرد. شما می توانید به فراخور کلاس خود اشکال مختلف دیگری که همپهشت باشند را مثال زده و برابری های اجزاء متناظر را بررسی کنید. سعی کنید از مثال هایی مانند دو مثلث متساوی الساقین همپهشت و یا دو مثلث متساوی الاضلاع همپهشت، و یا دو چندضلعی منتظم همپهشت که در آنها برابری های اجزاء متناظر بطور یکتا مشخص نمی شود نیز برای آشنایی دانش آموزان با این موارد استفاده کنید.

مثلث های همپهشت

هدف

- ۱- درک اینکه برابری سه زاویه از یک مثلث، نظیر به نظیر، با سه زاویه از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را لزوماً نتیجه نمی دهد.
- ۲- درک اینکه برابری سه ضلع از یک مثلث، نظیر به نظیر، با سه ضلع از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را همواره نتیجه می دهد.
- ۳- درک اینکه برابری اضلاع نظیر به نظیر دو چند ضلعی که مثلث نیستند، لزوماً همپهشتی آنها را نتیجه نمی دهد.
- ۴- درک کند که برابری دو ضلع و زاویه بین از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را ایجاب می کند.

۵- درک کند که برابری دو زاویه و ضلع بین از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلث دیگر، همپهشتی آن دو مثلث را ایجاب می کند.

۶- درک اینکه برابری دو ضلع از یک مثلث با هم، برابری دو زاویه از آن مثلث را ایجاب می کند و برعکس.

۷- حالت های همپهشتی مثلث ها را در حل مسائل همپهشتی مثلث ها بکار برد.

ابزار مورد نیاز

انواع مثلث که با کاغذ درست شده است:

خط کش

گونیا

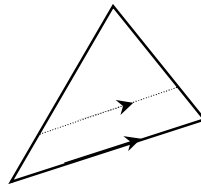
نقاله

روش تدریس

در این بخش درک حالاتی که همپهشتی دو مثلث را می توان نتیجه گرفت و حالاتی که همپهشتی دو مثلث را نمی توان نتیجه گرفت مورد نظر می باشد.

برای حالت سه زاویه که در ابتدا مطرح شده است با استفاده از شکل های کتاب و با درست کردن مثلث های کاغذی که زوایای نظیر به نظیر برابر دارند اما همپهشت نیستند (و یا دو گونیا که هم اندازه نباشند) و با قرار دادن تک تک زاویه های برابر از دو مثلث بر روی هم در سه مرحله، این مطلب که تساوی نظیر به نظیر سه زاویه در دو مثلث همپهشتی آنها را ایجاب نمی کند.

مثال: همواره می توان با رسم پاره خطی موازی یکی از اضلاع مثلث داده شده در درون آن، مثلثی بدست آورد که سه زاویه ی نظیر به نظیر برابر با مثلث داده

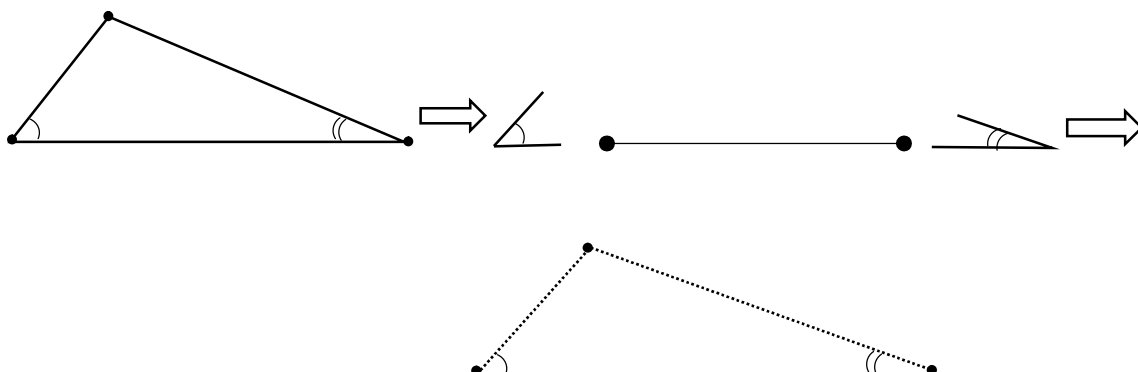


شده داشته باشد اما همنهشت نباشند.

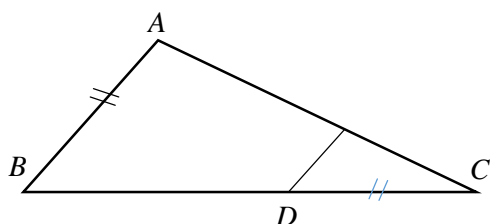
در حالت برابری سه ضلع بهتر است دانش آموز از وسایلی مانند سه عدد نی که هر یک به اندازه ی طول یکی از اضلاع مثلث داده شده ای می باشد استفاده کند و سعی کند با آن سه نی تمام مثلث هایی که می تواند را بسازد تا در این فرایند برایش مشخص شود که در این حالت تنها مثلثی که می تواند بسازد مثلثی است همنهشت با مثلث داده شده.

در کار در کلاس صفحه ی ۹۳ می توانید از دانش آموزان بخواهید پس از مشخص شدن همنهشتی مثلث ها اجزاء متناظر را مشخص کنند تا خواصی دیگر از مثلث متساوی الساقین و لوزی برایشان مشخص شود (مثلاً: میانه، نیمساز و عمود منصف وارد بر قاعده در مثلث متساوی الساقین بر هم منطبق اند و قطر لوزی نیمساز دو زاویه ی آن نیز می باشد).

در فعالیت صفحه ۹۴ حالت دو زاویه و ضلع بین نیز مانند حالات قبلی و با استفاده از شکل های مختلف یا کاغذ پوستی انجام می شود.



حل بعضی از تمرین ها



در تمرین ۳ هدف تأکید بر لزوم این

مطلب است که در حالت دو زاویه و ضلع

بین، ضلع های برابر در دو مثلث باید بین

زاویه های مورد نظر باشد. بعنوان مثالی دیگر می توانید مثلث های زیر را که در

آن BC ضلع بزرگ می باشد در نظر بگیرد و نقطه ی D را روی BC به گونه ای

اختیار کنید که $DC=AB$. حال از نقطه ی D مانند شکل پاره خط DE را موازی AB

رسم کنید. حال در دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle EDC$ زاویه های نظیر به نظیر برابرند و یک

ضلع برابر نیز دارند اما دو مثلث همنهشت نیستند.

توصیه های آموزشی

معمولاً دانش آموزان حالت های همنهشتی مثلث ها را بویژه با استفاده از

مخفف های (ضضض)، (ضض) و (رضز) در ذهن نگاه می دارند و درک چرایی

آن را کم اهمیت می بینند. در این فعالیت ها سعی شده دانش آموز به درک این

مطالب برسد و این کار با انجام فعالیت های کتاب و فعالیت هایی موازی با آن و

صرف وقت و بهره گیری از شکل ها و دست سازه ها و وسایل کمکی امکان پذیر

می باشد.

مثلث قائم الزاویه

هدف:

۱- مثلث قائم الزاویه را بشناسد

۲- اجزاء مثلث قائم الزاویه را بشناسد

۳- لزوم همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه در حالتی که وترهای برابر و یک ضلع زاویه قائمه برابر دارند را درک کند.

۴- لزوم همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه در حالتی که وترهای برابر و یک زاویه برابر دارند را درک کند.

۵- حالت همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه را در حل مسائل همنهشتی مثلث ها بکار ببرد.

۶- دلیل اینکه هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است را درک کند.

۷- دلیل اینکه هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است را درک کند.

ابزار مورد نیاز

انواع مثلث که با کاغذ درست شده است

خط کش

نقاله

گونیا

روش تدریس

همانطور که در فعالیت خواسته شده است دانش آموز با بدست آوردن اندازه ضلع سوم در مثلث ها (از طریق رابطه فیثاغورس) در می یابد که برابری وتر و یک ضلع از دو مثلث، برابری ضلع سوم آنها را نیز ایجاب کرده و لذا دو مثلث به

حالت سه ضلع برابر می شوند و به کافی بودن برابری وتر یک ضلع در دو مثلث قائم الزاویه جهت هم‌نهشتی آن دو مثلث پی می برد.

در فعالیت صفحه ۹۷ ابتدا با توجه به برابری زاویه ای تند از یک مثلث قائم الزاویه با زاویه ای حاده از یک مثلث قائم الزاویه دیگر، برابری زاویه های سوم آنها را نتیجه می گیرد و در این حالت چون وتر همواره بین دو زاویه حاده قرار دارد، هم‌نهشتی دو مثلث را در حالت دو زاویه و ضلع بین نتیجه می گیرد و لذا کافی بودن برابری وتر یک زاویه تند از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ای دیگر را برای هم‌نهشتی آن دو مثلث در می یابد.

در فعالیت صفحه ۹۸ دو خاصیت مهم و پرکاربرد، یکی از عمود منصف و دیگری از نیمساز بیان شده اند. در اثبات آنها همانطور که در فعالیت آورده شده است از حالت های هم‌نهشتی مثلث ها که دانش آموز به تازگی آموخته است، جهت تسلط بر استفاده از این روشها، استفاده شده است. در گفتگوی ابتدای فعالیت سعی شده علاوه بر این مفاهیم، مفهوم اثبات و فرق اثبات استنتاجی و اثبات استقرایی و میزان قابل استناد بودن آنها تا حدودی در ذهن دانش آموز جا بگیرد. دانش آموز درک کند که زمانی می توان ادعا کرد هر نقطه از یک خط دارای یک خاصیت مورد نظر می باشد که آن خاصیت برای نقطه ای دلخواه (یک نقطه از آن خط که ویژگی خاصی نسبت به بقیه نقاط نداشته باشد) از آن خط و در حالت کلی اثبات شود.

البته در این فعالیت تا مفهوم مکان هندسی پیش نرفته ایم، یعنی در واقع دانش آموز در پایان این فعالیت می داند که مثلاً هر نقطه ی روی عمود منصف یک

پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است اما نمی داند هر نقطه که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد نیز روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

حل بعضی از تمرین ها

۱- الف) اطلاعات کافی است و دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت اند.

ب) اطلاعات کافی است و دو مثلث به حالت وتر و یک زاویه تند همنهشت اند.

ج) اطلاعات کافی نیست.

د) اطلاعات کافی نیست.

۳- الف) دوران حول مرکز به اندازه ی زاویه ی 180° .

ب) دوران حول مرکز به اندازه ی زاویه ی 180° .

ج) تقارن نسبت به قطری از دایره که نیمساز زاویه \widehat{AOC} می باشد.

توصیه های آموزشی

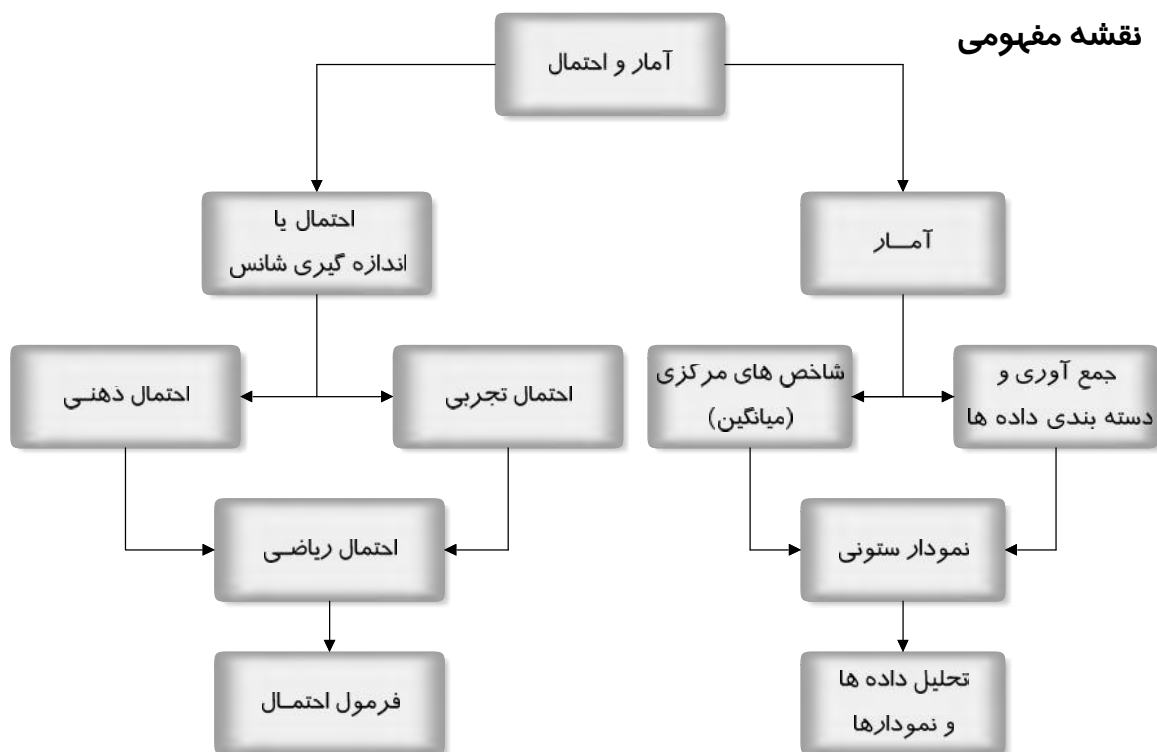
در مسائل همنهشتی مانند فعالیت صفحه ۹۸، درک آنکه با توجه به گزاره ی مطرح شده باید بدنبال چه چیز باشیم و چرا مثلث ها را تشکیل دادیم و بدنبال اثبات همنهشتی آنها هستیم، بسیار مهم است. زیرا در عمل دیده شده بسیاری از دانش آموزان نام مفهوم مورد نظر و شکل مربوط به اثبات آنرا بخاطر می سپارند و مثلث ها را تشکیل داده و اثبات را نوشته اند اما لزوم انجام این کار را درک نکرده اند.

- آمار و احتمال

راهنمای معلم - ریاضی

نگاه کلی به فصل

آمار و احتمال از کلاس دوم ابتدایی در کتاب های درسی ریاضی به صورتی کاملاً شهودی، تجربی و در سطحی مقدماتی بیان و مطرح شده است. در کتاب درسی هفتم بحث احتمال ریاضی، مطرح شده که توصیه می شود قبل از تدریس بخش احتمال این فصل به صورت یادآوری مطالب کتاب هفتم مرور شود. در مورد آمار مطالب لازم برای ورود به این مبحث در سال های قبل، بخصوص پایه های ششم و هفتم عنوان شده است. دانش آموزان با انواع نمودارها و طرز رسم آنها آشنا بوده و با مفهوم میانگین داده ها نیز آشنایی دارند.



تصویر عنوانی

همان طور که در توضیح پایین تصویر این فصل آمده است، یکی از کاربردهای آمار و احتمال در غنی سازی است و سانتریفوژها بر همین اساس طراحی شده اند (هرچقدر سرعت آنها بیشتر باشد احتمال برخورد ذرات بیشتر است) در این تصویر تعدادی سانتریفوژ مشاهده می شود و در گوشه سمت راست و بالای تصویر نقاشی از داخل یک سانتریفوژ و ذرات که در حال چرخش هستند. در وسط تصویر علی رضا پسر شهید احمدی روشن به چشم می خورد که با دستانی پاک و معصوم و گشاده و نگاهی بسیار امیدوار به آینده به بچه ها می گوید: با این که در این راه سرمایه های بسیار بزرگی را از دست داده ایم ولی به آینده و به ادامه راه این شهیدان امیدوار هستیم و جمله ی بسیار کلیدی و راه گشای «نحن انصار الحسین» که در زیر عکس شهید احمدی روشن به چشم می خورد.

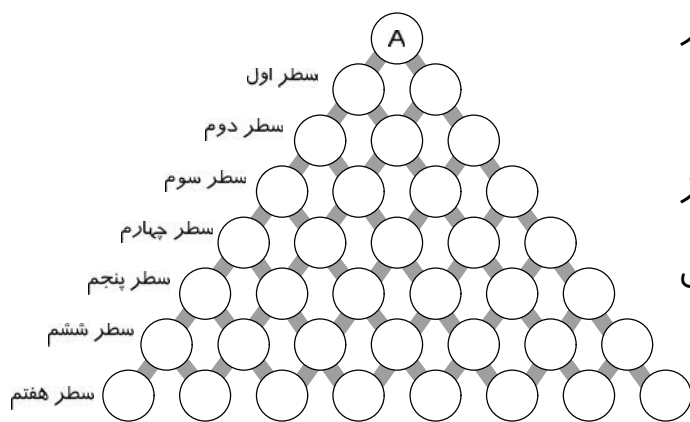
دانستنیهای برای معلم

مسیرهایی برای توسعه

تقویت شبکه مفاهیم ریاضی می تواند به دانش آموزان در درک بهتر مفاهیم کمک کند.

فعالیت زیر به عنوان فعالیتی برای توسعه مفاهیم این فصل و در راستای تقویت شبکه مفاهیم طرح شده است. این فعالیت با آن که به طور مستقیم با مفاهیم این فصل مرتبط است، با مفاهیم فصل های ۷ و ۸ نیز ارتباط دارد.

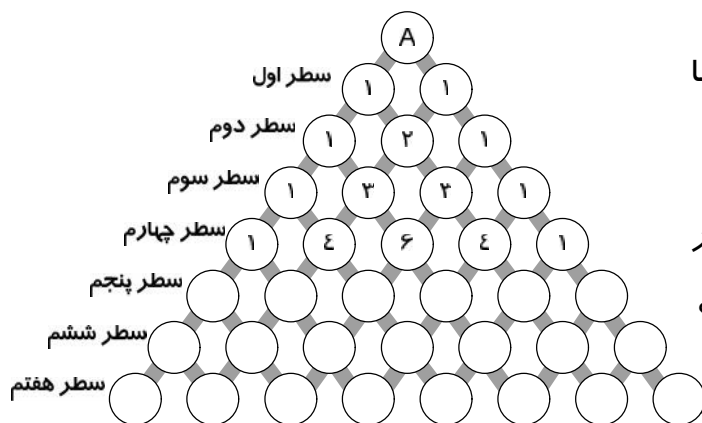
- یک توپ را از نقطه A رها می کنیم.
توپ از یکی از دو مسیر حرکت



می کند و به یکی از خانه های سطر اول می رسد.

به همین ترتیب توپ در هر خانه از یکی از دو مسیر پیش رو به حرکتش به سمت پایین ادامه می دهد.

۱- توپ از چند مسیر مختلف می تواند به هر یک از خانه ها برسد؟



۲- چرا عدد درون هر دایره برابر حاصل جمع دو دایره بالای آن است؟

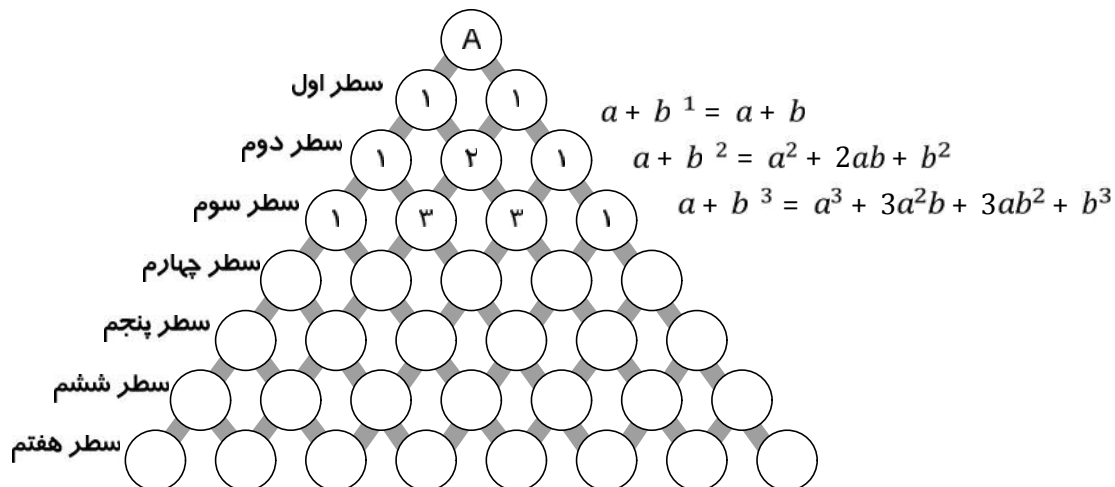
۳- چه الگوهایی در جدول مثلثی شکل می بینید؟

۴- توپ از دو راه می تواند از A به سطر اول برسد. از هر یک از خانه های سطر اول نیز از دو راه می تواند به سطر دوم برسد. پس روی هم چهار راه مختلف برای رسیدن از A به سطر دوم وجود دارد. چند راه برای رسیدن از A به هر یک از سطرها بعدی وجود دارد؟ چند راه برای رسیدن به سطر n ام؟

۵- اگر مسیر توپ از هر خانه به صورت تصادفی و با احتمال مساوی انتخاب شود، احتمال رسیدن توپ به یکی از خانه های سطر ششم را حساب کنید.

۶- مثلث بالا به مثلث خیام- پاسکال معروف است. اما تاریخچه آن به قبل از پاسکال (قرن هفدهم میلادی) و حتی خیام (قرن پنجم و ششم هجری برابر با قرن دوازدهم میلادی) برمی گردد. پاسکال این جدول را برای بسط اتحاد دو جمله ای

تنظیم کرد. بدین ترتیب اگر در بسط عبارت $a + b^n$ جملات را بر حسب درجه a یا b مرتب کنیم، می توانیم ضرایب جملات را به ترتیب از سطر n ام مثلث خیام-پاسکال پیدا کنیم. چرا؟



۷- تعمیم اتحاد دو جمله ای به نام نیوتن (قرن هفدهم میلادی) ثبت شده است. این اتحاد کاربردهای جالبی دارد. مثلاً به کمک آن می توانیم به سادگی حاصل توان های ۹ و ۱۱ را پیدا کنیم؛ روند این عملیات را با توجه به مثال زیر توضیح دهید.

$$a + b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$11^5 = 10 + 1^5 = 10^5 + 5 \times 10^4 + 10 \times 10^3 + 10 \times 10^2 + 5 \times 10 + 1$$

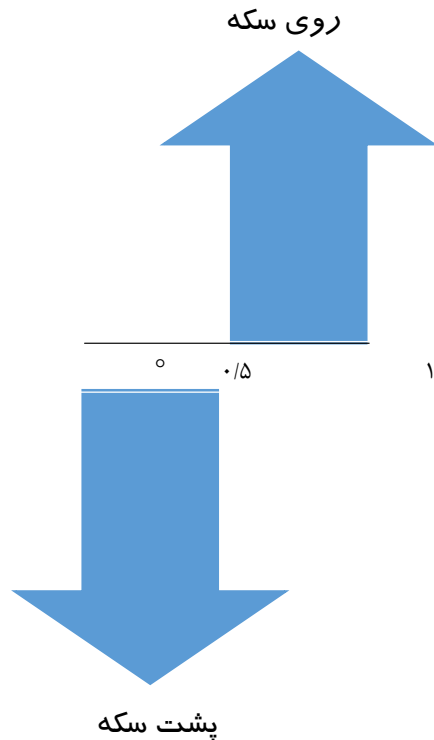
$$= 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 = 161051$$

$$9^5 = 10 - 1^5 = 10^5 - 5 \times 10^4 + 10 \times 10^3 - 10 \times 10^2 + 5 \times 10 - 1$$

$$= 100000 - 50000 + 10000 - 1000 + 50 - 1 = 59049$$

استفاده از ابزارهای فن آورانه

استفاده از نرم افزار *Excel* برای ساختن مولد عددهای تصادفی می تواند امکانی مجازی برای تجزیه آزمایش های احتمال ایجاد کند. تکالیف زیر با هدف ساخت شبیه ساز پرتاب سکه پیشنهاد شده است. شبیه ساز پرتاب تاس را هم می تواند به همین ترتیب طراحی کنید.



- ساخت سکه (صفر یا یک به جای پشت یا رو)

در خانه ی *A1* عبارت $=RAND()$ را بنویسید و سپس دکمه *Enter* را بزنید. چه عددی در این خانه دیده می شود؟ دکمه *F9* صفحه کلید را بزنید، چه تغییری مشاهده می کنید؟

اگر درست عمل کرده باشید، یک عدد بین صفر و یک (بزرگتر و مساوی صفر و کوچکتر از ۱) در خانه ی *A1* ظاهر می شود و با هر بار فشردن دکمه *F9* به صورت تصادفی تغییر می کند. جالب

نیست؟

گوشه ی راست پایین خانه *A1* را بگیرید و به سمت پایین جدول تا خانه *A10* بکشید. بدین ترتیب شما ۱۰ عدد تصادفی بین صفر و یک را هم زمان روی صفحه مشاهده می کنید.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D
1	0/310347			
2	0/480584			
3	0/900958			
4	0/147447			
5	0/700913			
6	0/841295			
7	0/016104			
8	0/680158			
9	0/215917			
10	0/917193			
11				
12				
13				

در خانه‌ی $B1$ عبارت $=ROUND(A1,0)$ را

بنویسید و سپس دکمه $Enter$ را بزنید.

چه عددی در این خانه دیده می‌شود؟

چند بار دکمه $F9$ صفحه کلید را بزنید و هر

بار مقدار هر دو خانه $A1$ و $B1$ را نگاه کنید. چه

تغییری مشاهده می‌کنید؟

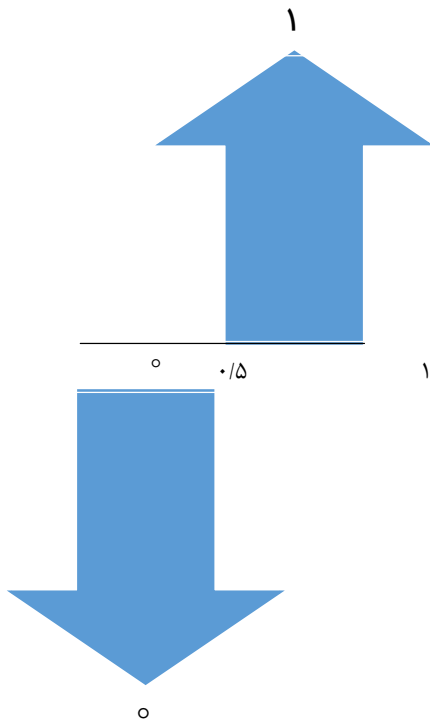
عبارت $=ROUND(A1,0)$ که در خانه $B1$ ی

نوشته شده است، به این معنی است که عدد

مربوط به خانه $A1$ با تقریب کمتر از یک گرد (یا

اصطلاحاً رُند) می‌شود و در این خانه قرار

می‌گیرد.



با هر بار زدن دکمه $F9$ صفحه کلید یکی از عددهای ① یا ② به طور تصادفی

در خانه $B1$ قرار می‌گیرد. احتمال آمدن ② با احتمال آمدن ① مساوی است!

چرا؟ مثل یک سکه که با هر بار پرتاب یا به پشت می‌افتد یا به رو و احتمال این دو

پیشامد برای یک سکه‌ی سالم، مساوی است!

هر بار ② آمدن عدد را معادل به پشت افتادن سکه و هر بار ① آمدن عدد را

معادل به رو افتادن سکه در نظر بگیرید.

دکمه $F9$ صفحه کلید را بزنید تا سکه دوباره پرتاب شود، به رو افتاد یا به

پشت؟

دوست دارید ۱۰ تا سکه را با هم پرتاب کنید؟ گوشه‌ی راست پایین خانه $B1$

را بگیرید و به سمت پایین جدول تا خانه $B10$ بکشید!

معرفی منابع برای معلمان

- کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات، تألیف رابرت، ای.ریس، مرلین.ن.سایدام و مری منلگو مرلیند کوئیست؛ ترجمه مسعود نوروزیان؛ انتشارات مدرسه؛ فصل ۱۴
- ریاضیات برای معلمان؛ تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی.ال.مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل های ۲۷ و ۲۸ و ۲۹.
- مجله رشد برهان متوسطه اول شماره های ۶۷، ۶۸، ۶۹ و ۷۰
- ورودی به نظریه احتمال، دکتر عین اله پاشا، سری کتابهای کوچک ریاضی، انتشارات مدرسه.
- ورودی به نظریه آمار، دکتر عین اله پاشا، سری کتابهای کوچک ریاضی، انتشارات مدرسه.
- جبر و احتمال، سری کتابهای از مدرسه تا دانشگاه، انتشارات مدرسه.

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱- ۳۰ دانش آموز در آزمون سنجش IQ (بهره هوشی) شرکت نموده اند، نتایج به دست آمده به شرح زیر است:

۱۱۱	۹۶	۱۰۰	۱۱۲	۱۳۰	۹۲	۱۱۸	۱۰۹	۱۱۳	۱۱۵
۱۱۵	۱۱۰	۱۱۸	۱۰۷	۱۱۷	۱۲۷	۱۳۵	۱۲۶	۱۳۴	۱۰۲
۱۱۴	۱۰۷	۱۲۱	۹۸	۱۲۹	۱۱۲	۱۱۷	۱۱۲	۱۳۰	۱۰۰

جدول فراوانی دسته بندی شده را تعداد ۷ دسته برای این دانش آموزان در نظر گرفته و نمودار مستطیلی این داده ها را رسم و آن را تفسیر و تحلیل کنید.

۲- در مسأله قبل ابتدا با ماشین حساب و سپس با استفاده از مرکز دسته میانگین داده ها را محاسبه کنید و خطای موجود را محاسبه کنید.

۳- میانگین ده عدد ۴، ۷، ۱۲، ۸، ۹، ۳، ۲، ۵، x و ۶ برابر با $\frac{6}{5}$ است مقدار x را بدست آورید.

۴- در جعبه ای ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. اگر از این جعبه ۱ مهره به تصادف خارج کنیم چقدر احتمال دارد: الف) مهره خارج شده آبی باشد ب) مهره ی خارج شده قرمز نباشد.

۵- ۲ سکه و ۱ تاس را با هم می اندازیم نمودار درختی این پدیده را رسم کرده و به کمک آن به سئوالات زیر پاسخ دهید:

الف) چقدر احتمال دارد هر دو سکه رو بیایند.

ب) چقدر احتمال دارد عدد تاس ۶ بیاید.

ج) چقدر احتمال دارد عدد تاس ۶ نیاید.

۶- اگر دو تاس را با هم بریزیم، مشخص کنید در کدام یک از حالت های زیر دو پیشامد تعریف شده هم شانس و کدام یک غیرهم شانس هستند.

الف) { I) پیشامد این که هر دو زوج باشند
II) پیشامد این که هر دو اول باشند

ب) { I) پیشامد این که تاس اول بزرگتر از دومی باشد
II) پیشامد این که تاس دوم بزرگتر از اولی باشد

ج) { I) پیشامد این که مجموع دو تاس ۷ باشد
II) پیشامد این که مجموع دو تاس ۶ باشد

د) { I) پیشامد این که اعداد دو تاس مثل هم باشند
II) پیشامد این که هر دو تاس بزرگتر از ۳ باشند

۷- رضا در کمد لباس خود ۳ شلوار با رنگ های آبی، طوسی و مشکی و ۴ پیراهن با رنگ های آبی، طوسی، مشکی و سفید دارد او به تصادف ۱ شلوار و ۱ پیراهن از کمد خود بر می دارد. چقدر احتمال دارد شلوار و پیراهنِ هم‌رنگ برداشته باشد؟

دسته بندی داده ها

هدف:

- ۱- یادآوری و مرور آنچه در سال های قبل آموخته اند بخصوص نمودارهای ستونی
- ۲- تجزیه و تحلیل داده ها و نمودارها
- ۳- دسته بندی داده ها و دلیل دسته بندی کردن آنها و به دست آوردن طول دسته مناسب
- ۴- معرفی میانگین داده های دسته بندی شده

ابزار مورد نیاز

- ۱- خط کش
- ۲- ماشین حساب

روش تدریس

در صفحه ی ۱۲۰ چهار نمودار به چشم می خورد که صرفاً برای یادآوری و به عنوان نمادهایی برای درس آمار آورده شده اند و دو نوشته در بالا و پایین این نمودارها که نوشته ی بالایی به تعریف علم آمار و تأکید بر تحلیل و تفسیر اطلاعات

می پردازد و در نوشته‌ی پایینی دلیل دسته بندی کردن داده ها را در بعضی از مسائل آماری بیان می کند.

هدف از طرح فعالیت صفحه ی ۱۲۱، لزوم دسته بندی کردن داده ها (به دلیل تعداد زیاد آنها)، معرفی دامنه تغییرات $R = ۲۰۵ - ۱۳۰ = ۷۵$ و تعریف تعداد دسته‌ها (۵ دسته) برحسب نیاز و نوع مسأله طرح شده و سرانجام به دست آوردن طول دسته‌ها از فرمول $\left(\frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته ها}} = \text{طول دسته} \right)$ می باشد.

توجه: قبلاً و در فصل های پیشین مفهوم $a \leq x < b$ (اعداد بین a و b و خود a) برای دانش آموزان بیان شده است و یادآوری آن مفید است.

تذکر: باید برای دانش آموزان بیان شود که برای رسم نمودار ستونی که از دو محور تشکیل یافته، محورها را محور اعداد تصور نکنند تا وقتی بین دو ستون فاصله وجود دارد، ابهامی برای آنها پیش نیاید.

اجازه بدهید دانش آموزان برای پاسخگویی به سئوالات بالای صفحه ۱۲۲ با هم بحث کرده و پاسخ های خود را توضیح داده و دلایل خود را بیان کنند و در نهایت شما آنها را به سمت پاسخ صحیح راهنمایی کنید.

حل بعضی از تمرین ها

هر دو کار در کلاس صفحه ۱۲۲ مشابه فعالیت قبل بوده (فقط تعداد و مقدار داده‌ها تغییر کرده است) و به تثبیت آنچه در فعالیت آموخته‌اند کمک می کنند.

در کار در کلاس ۱، چهار دسته مورد نظر را توجیه کنید مثلاً: هوای خیلی سرد، هوای کمی سرد، هوای سرد و هوای خنک و همین طور برای کار در کلاس ۲ برای نمرات درس ریاضی ۵ حالت در نظر بگیرید مثلاً: خیلی ضعیف، ضعیف، متوسط، خوب و عالی.

دانش آموزان در تمرین های صفحه ۱۲۳، در صورتی که روی فعالیت و کار در کلاس ها در کلاس درس به صورت مناسبی بحث شده باشد، مشکل خاصی نخواهند داشت و شما می بایست پاسخ آنها که در منزل انجام داده اند را چک کنید و حتی در صورت نیاز در کلاس پاسخ ها را به بحث و تبادل نظر بگذارید.

میانگین داده ها

هدف

- ۱- درک مفهوم میانگین
- ۲- پیدا کردن میانگین داده ها با تعداد کم
- ۳- درک تقریبی بدون میانگین محاسبه شده از جدول داده های دسته بندی شده
- ۴- پیدا کردن میانگین داده های دسته بندی شده

ابزار مورد نیاز

- ۱- ماشین حساب

روش تدریس

کادر بالای صفحه ی ۱۲۴ هدف از طرح میانگین را به وضوح روشن می سازد و فرمول محاسبه میانگین را یادآوری می کند.
فعالیت ۱، صرفاً محاسبه میانگین ۵ داده مذکور است که استفاده از فرمول میانگین را ایجاب می کند.

هدف از فعالیت ۲ این است که دانش آموز با محاسباتی ساده روی اعداد صحیح به این مسأله پی ببرد که مجموع اختلاف اعداد بیشتر از میانگین با مجموع اختلاف

اعداد کمتر از میانگین همواره با هم برابر است (منظور از اختلاف دو عدد، عدد بزرگتر منهای عدد کوچکتر است).

در فعالیت ۳ با اضافه کردن دو عدد به ۷ عدد داده شده میانگین داده ها که ۹ داده است تغییر می کند و دانش آموز با محاسبه ی میانگین ۹ داده و اضافه کردن میانگین دو داده ی جدید به میانگین ۷ داده به این نتیجه می رسد که این دو میانگین برابر نبوده و لذا نمی توان میانگین داده های اضافه شده را به میانگین قبلی اضافه کرد.

در فعالیت ۴ بیشتر با توجه به فعالیت ۲ منظور حدس زدن میانگین است یا پیدا کردن عددی که مجموع اختلاف اعداد بالا و پایین آن با هم برابر باشند.

کار در کلاس ابتدای صفحه ۱۲۵ با هدف حدس زدن با تقریب خوب برای محاسبه ی میانگین طراحی شده است.

هدف از فعالیت ۱ در صفحه ۱۲۵ محاسبه ی میانگین برای داده های دسته بندی شده است که دانش آموزان باید ابتدا برای هر دسته مرکز دسته ای به دست آورند (میانگین حد بالا و حد پایین دسته) و سپس به جای هر عدد داخل در یک دسته، مرکز آن دسته را قرار دهند و با ضرب فراوانی هر دسته در مرکز دسته و جمع اعداد حاصل و تقسیم آن بر ۴۰ به یک میانگین با تقریب خوب دست پیدا می کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۲۶ دوره ای بر مطالب بیان شده در فعالیت های قبل است.

تمرین های ۲۰۱ در صفحه ۱۲۶ نیز برای تثبیت مطالب فراگرفته شده طراحی شده اند ولی در تمرین ۳ هدف آن است که دانش آموز پی ببرد برای تفسیر و تحلیل داده ها، میانگین پارامتر خیلی قابل اطمینانی نمی باشد و کنار گذاشتن

نمره‌هایی که فاصله‌ی زیادی با میانگین دارند تأثیر زیادی روی میانگین ندارد. در واقع میانگین کلاس نمی‌تواند نمایانگر نمره‌های خیلی خوب یا خیلی بد باشد.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

هدف:

۱- احتمال با شانس یکی نیستند و در واقع احتمال شانس را اندازه‌گیری می‌کند.

۲- یادآوری فرمول محاسبه‌ی احتمال رخداد یک پیشامد تصادفی می‌باشد. یعنی

$$\text{احتمال رخ داد یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

۳- به دست آوردن عدد احتمال و مقایسه‌ی آن با دو عدد صفر و یک و این که هر

چقدر احتمال رخ دادن یک پیشامد به صفر نزدیک تر باشد شانس رخداد آن کمتر

و هر چه قدر به عدد ۱ نزدیکتر باشد شانس رخدادی آن پیشامد بیشتر یا

اصطلاحاً محتملتر است.

۴- تشخیص پیشامدهای هم شانس (این که اگر عدد حاصل از محاسبه احتمال برای

دو پیشامد با هم برابر باشد شانس رخداد آنها برابر است و لذا هم شانس

هستند)

ابزارهای مورد نیاز

۱- تاس

۲- سکه

۳- چرخنده

روش تدریس

فعالیت های ۲ و ۱ در صفحه ۱۲۸ علاوه بر یادآوری مطالب مربوط به احتمال در کتاب ریاضی هفتم، اهداف فوق را دنبال کرده و تأکید می کنند.

در فعالیت ۳، روش صحیح استفاده از مهره های رنگی در مسائل مورد نظر است یعنی این که در تمام مسائل که در آنها مهره رنگی وجود دارد باید مهره ها شماره گذاری شده باشند تا متمایز بودن آنها مشخص باشد.

توصیه آموزشی

۱- به عنوان اولین مثال برای استفاده از فرمول احتمال بهتر است از این مثال استفاده شود که: در جعبه ای ۲ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد و ۱ مهره تصادفی از جعبه خارج می کنیم احتمال خارج شدن مهره قرمز و مهره آبی را به دست آورید.

$$\text{احتمال خارج شدن مهره قرمز} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{احتمال خارج شدن مهره آبی} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

دانش آموز با حل این مثال به این نکته پی می برد که فرمول احتمال عددی را به عنوان احتمال رخداد یک پیشامد حاصل می کند که مطابق با توقع ما می باشد. یعنی همان طور که تعداد مهره های آبی ۲ برابر تعداد مهره های قرمز است عدد احتمال آبی خارج شدن یعنی $\frac{2}{3}$ نیز دو برابر عدد احتمال قرمز خارج شدن یعنی $\frac{1}{3}$ است.

۲- شما همکاران محترم با کار در کلاس های صفحه ۱۲۹ پی می برید که دانش آموزان تا چه حد به اهداف ذکر شده دست پیدا کرده اند و توجه دارید

که کار در کلاس شماره ۳ یک مسأله باز پاسخ است و پاسخ دانش آموزان به این کار در کلاس یکسان نمی باشد.

۳- هدف از فعالیت ۱ در صفحه ۱۳۰ رسیدن به تعریف و به دست آوردن پیشامد متمم است (البته بدون آن که از پیشامد متمم نام برده شود) و این که مقدار احتمال کل، همواره ۱ است (مجموع احتمال رخدادن و احتمال رخ ندادن یک پیشامد همواره ۱ است).

در فعالیت ۳ دانش آموز پی می برد که با داشتن کل مهره های یک جعبه و احتمال مثلاً سبز بودن مهره ی خارج شده می تواند تعداد مهره های سبز را بیابد.

تمرین های صفحه ۱۳۱ برای تثبیت موضوع های مطرح شده توسط دانش آموزان در منزل حل می شود و شما همکاران محترم آن ها را بررسی و تصحیح می کنید توصیه می کنیم روی پاسخ های غلط خط نکشید! و دلیل آن ها را ریشه یابی کنید شاید نوع تدریس ما باعث اشتباه آنها باشد.

در تمرین ۱ هدف اصلی این است که دانش آموز درک کند برای رخداد پیشامدها هیچ قطعیتی وجود ندارد و به همین دلیل عبارت های (الف) و (ج) نادرست و عبارت (ب) دست است.

بررسی حالت های ممکن

هدف

- ۱- شمارش و یافتن همه حالت های مطلوب و همه ی حالت های ممکن
- ۲- استفاده از جدول برای تعیین و شمارش حالتها
- ۳- استفاده از نمودار درختی برای تعیین و شمارش حالتها

۴- تشخیص همه حالتها در پرتاب دو سکه و دو تاس با هم و این که مثلاً در پرتاب دو سکه (پشت و رو) یا (رو و پشت) فرق دارد.

۵- درک این مطلب که انداختن دو تاس ۳۶ حالت مجزا تولید می کند پس باید تاسها را متمایز و مثلاً از دو رنگ قرمز و آبی فرض کرد.

ابزار مورد نیاز

۱- دو سکه متمایز

۲- دو تاس

روش تدریس

در فعالیت ۱ بالای صفحه ۱۳۲ دانش آموز می بایست به این مطلب برسد که حالتهای هر دو سکه رو و هر دو سکه پشت هر کدام ۱ حالت از ۴ حالت ممکن را تشکیل داده و یک سکه رو و دیگری پشت دو حالت از ۴ حالت را تشکیل داده و لذا شانس محدثه بیشتر است.

در فعالیت ۲ هدف رسیدن به این مفهوم است که هر چقدر تعداد آزمایش ها بیشتر باشد انتظار ما برای رسیدن یا نزدیک شدن به عدد احتمال بیشتر خواهد بود. هدف از کار در کلاس پایین صفحه ی ۱۳۲ آن است که دانش آموز همهی حالتها را در جدول تجربه و مشاهده کند و حالتهای مطلوب را نیز به راحتی مشخص کند.

در فعالیت ۱ صفحه ۱۳۳ حالتهای ایستادن عقربه ها در دو چرخنده را به صورت نمودار درختی نمایش داده ایم تا دانش آموز درکی کاملاً شهودی و بدون اشتباه از همه حالتهای ممکن داشته باشد. این هدف در فعالیت ۲ نیز دنبال می شود.

در تمرین های صفحه ۱۳۴ و ۱۳۵ که توسط دانش آموزان در منزل حل می شود دانش آموزان توسط نمودارهای درختی و جدول های مورد نظر همه ی حالتها را مشاهده و تجربه می کنند مثلاً در تمرین ۱ تعداد همه ی انواع دوچرخه برابر است با $2 \times 3 \times 2 = 12$ که با رسم نمودار درختی به راحتی این دوازده حالت قابل مشاهده است و احتمال خواسته شده $\frac{1}{12}$ است. در تمرین ۳ قسمت (ب) باید توجه داشت که رمز دو رقمی با رمزی که از دو رقم تشکیل شده است فرق دارد در حالت رمز دو رقمی ۰۲ عدد دو رقمی نیست ولی در رمزی که از دو رقم تشکیل شده باشد ۰۲ یا ۰۰ رمز به حساب می آید.

در قسمت (ب) تمرین ۳ منظور رمزی است که از دو رقم تشکیل یافته است و لذا $10 \times 10 = 100$ حالت ممکن وجود دارد که فقط ۱ حالت مورد نظر و مطلوب است و احتمال باز شدن قفل $\frac{1}{100}$ است.

در تمرین ۴، یکی از تاس ها و دیگری ۵ بیاید دو حالت است.

حالت ۱: تاس آبی ۳ و تاس قرمز ۵ بیاید.

حالت ۲: تاس آبی ۵ و تاس قرمز ۳ بیاید.