

# کتاب راهنمای معلم ریاضی پایه هشتم

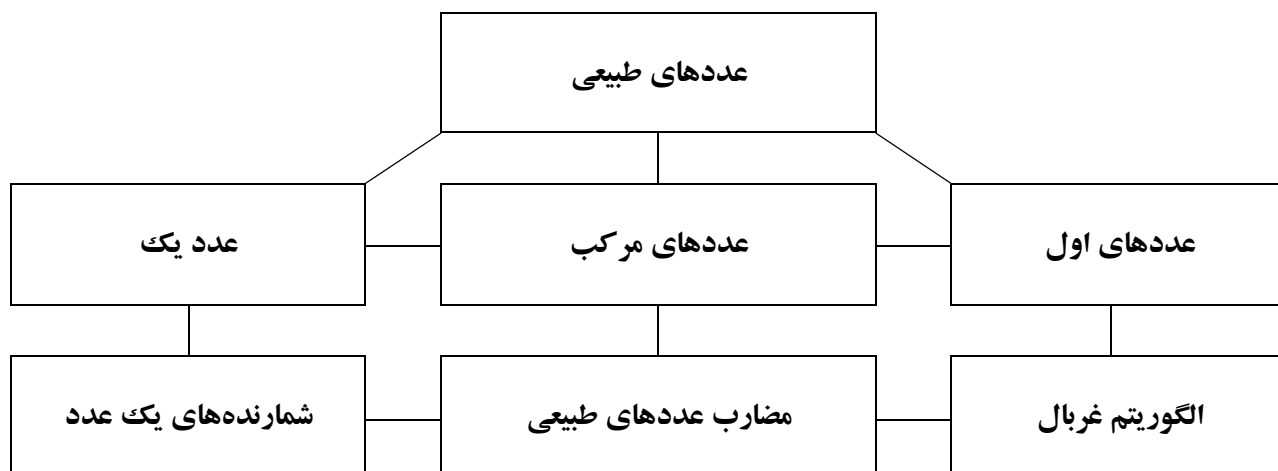
## حساب عددهای طبیعی

## فصل ۲

نگاه کلی به فصل :

در پایه هفتم، دانش آموزان با شمارنده‌ها و عددهای اول و کاربرد آنها در محاسبه ب.م.م. و ک.م.م. آشنا شده‌اند. بیشتر مطالب این فصل مربوط به یادآوری مفاهیم سال گذشته است.

در سال هشتم، ضمن یادآوری مفاهیم عددهای اول و کاربردهای آن با مفاهیم جدیدی مانند دو عدد نسبت به هم اول (متباین) و روش الگوریتم غربال، آشنا می‌شوند. در ضمن می‌توانند عددهای اول را از غیر اول، تشخیص دهند.



تصویر عنوانی : در این تصویر عددهای اول و نسبت آنها با عددهای مرکب با شکلی که ترتیب آنها ایجاد می‌کند، مشخص شده است.

روش‌های دیگری برای مشخص کردن عددهای اول در مجموعه عددهای طبیعی وجود دارد. برای مثال :  
اولین عدد طبیعی اول نیست و دوتا یک بعدی آن نشان می‌دهند عددهای ۲ و ۳ اول‌اند.

## حساب عددهای طبیعی

### عدد طبیعی عدد اول

برخی از حیوان‌ها را هم می‌توان با «اندازه» و «مقدار» آشنا کرد. برای مثال پرنده‌گانی هستند که با آموزش می‌توانند تفاوت توده‌ای را که شامل سه چیز است با توده‌ای که شامل دو چیز است، تشخیص بدهند. ولی همین پرنده‌ها در مورد توده‌هایی که شامل شش و هفت چیز باشند، اشتباه می‌کنند.

کودک هم در فاصله یک تا دو سالگی، تقریباً به همین گونه در شناخت مقادیر دچار تردید می‌شود. انسان در دوره‌ای دراز که به صدها هزار سال می‌رسد، توانست عددشماری را یاد بگیرد.

«مارسل بل» در کتاب *تاریخ ریاضیات*، چنین بیان کرده است: «... ساکنان جنگل‌های جنوب آفریقا، برای نامیدن عددها، تنها سه نام دارند: یک، دو و بسیار». اما به تدریج مرز شمارش بالاتر رفت تا اینکه اقلیدس (سده سوم پیش از میلاد) بی‌پایان بودن عددهای اول را ثابت کرد. او در روش ساده خود (برهان خلف) بزرگترین عدد اول را  $P$  نامید. روشن است که عدد  $A = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times P + 1$  بر  $P$  و هیچ کدام از عددهای کوچک‌تر از  $P$  بخش پذیر نیست؛ بنابراین  $A$ ، عددی اول است.

توجه کنید که این اثبات، استدلال نمی‌کند که هر عددی به شکل  $A$  درست شود عددی اول است، بلکه تنها نشان می‌دهد که اگر به فرض، بزرگ‌ترین عدد اول  $P$  باشد، عدد  $A$  که بزرگ‌تر از  $P$  است نیز اول خواهد بود.

در کتاب هشتم راهی برای تعیین عددهای اول به کار رفته است که به غربال «اراتستن» معروف است (اراتستن در سال‌های ۲۷۶ تا ۱۹۶ پیش از میلاد می‌زیست و چون در آخر زندگی نابینا شد، از طریق گرسنگی، خودکشی کرد. او ریاضی‌دان، اخترشناس و جغرافی‌دان بود. و بیشتر عمرش را در اسکندریه گذراند. او در روش بسیار دقیق و قابل اعتماد خود مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ... را با یک چوب کوچک سوراخ می‌کرد مثل اینکه عددهای غیراول را از سوراخ الک بیرون می‌ریخت و تنها عددهای اول را نگاه می‌داشت).

روش اراتستن در گذر تاریخ پیشرفت‌هایی کرد و روش جست‌وجوی اعداد اول ساده‌تر شد. مثلاً یک دانشجو در سال ۱۳۲۳ شمسی و در ایام جنگ جهانی دوم یکی از این «غربال‌های» جدید را درست کرده است:

به اعداد زیر دقت کنید. چه رابطه‌ای میان اعداد این جدول مشاهده می‌کنید؟

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	...
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

اگر عددی مثل  $n$  در این جدول وجود داشته باشد، عدد  $2n+1$  غیر اول است و اگر عددی مثل  $n$  در این جدول نباشد، حتماً عدد  $2n+1$  اول است.

مثال: در جدول عدد ۳ وجود ندارد، پس  $2(3)+1$  یعنی ۷، عدد اول است.

در جدول، عدد ۵ وجود ندارد، پس  $2(5)+1$  یعنی ۱۱، عدد اول است.

در جدول عدد ۷ وجود دارد، پس  $2(7)+1$  یعنی ۱۵، عدد اول نیست.

اگر به ترتیب، اعدادی که در این جدول نیست را دو برابر کرده و با یک جمع کنید، می‌توانید تمام اعداد اول را به دست آورید.

«پی‌یر دو فرما» (۱۶۶۵-۱۶۰۱) که ساعت‌های فراغت خود را به ریاضیات می‌پرداخت، تصور می‌کرد که

عدد  $F_n = 2^{(2^n)} + 1$  به‌ازای هر عدد درست  $n$  عددی اول می‌شود ولی «لئونارد اویلر» در سال ۱۷۳۲ ثابت کرد که

این عبارت به‌ازای  $n = 5$  عددی مرکب و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. بزرگ‌ترین عدد اولی که تا سال ۱۹۷۹ م. شناخته

شده بود، عدد  $2^{2^{17}} - 1$  بود که تعداد رقم‌های آن به ۶۵۰۵۰ رقم می‌رسید.

آیا بین  $n^2$  و  $(n+1)^2$  به‌ازای مقدارهای صحیح و مثبت  $n$ ، همیشه یک عدد اول وجود دارد؟

آیا تعداد اعداد اول دوقلو (مانند (۵ و ۷) - (۱۱ و ۱۳) - (۱۷ و ۱۹) - و ... و (۱۰۰۰۶۴۲۷ و ۱۰۰۰۶۴۲۹) و ...) بی‌پایان است؟

یکی از ادعای «کریستین گلدباخ» این بود که می‌توان هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۵ را به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. مثلاً:  $۲۱ = ۱۱ + ۷ + ۳$  و یا  $۵۰ = ۲ + ۵ + ۴۳$  و  $۶ = ۲ + ۲ + ۲$  و  $۷ = ۲ + ۲ + ۳$  و  $۸ = ۲ + ۳ + ۳$  و  $۹ = ۳ + ۳ + ۳$  و  $۱۰ = ۲ + ۳ + ۵$  و  $۱۱ = ۳ + ۳ + ۵$  و  $۱۲ = ۲ + ۵ + ۵$  و  $۱۳ = ۳ + ۵ + ۵$ .

از تاریخ پایان سال ۱۳۷۹ تا پایان سال ۱۳۸۱ جایزه یک‌میلیارد تومانی برای اثبات این حدس گذاشته شد، اما کسی نتوانست آن را اثبات کند!

## عدد اول

### مسیرهایی برای توسعه

طرح فعالیت‌هایی پیرامون تجزیه عددها به عوامل اول و کاربردهای آن می‌تواند مسیر مناسبی برای توسعه مفاهیم این فصل باشد. چند نمونه از این فعالیت‌ها در اینجا آمده است:

۱. وقتی دو عدد، هیچ شمارندهٔ مشترکی به غیر از یک نداشته باشند، می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم

اولند. به کمک تجزیه اعداد به عوامل اول کسر زیر را ساده کنید، به طوری که صورت و مخرج نسبت به هم اول باشند.  
 $\frac{۵۴}{۷۵}$

۲. سطر اول جدول زیر با عددهای طبیعی دلخواه پر کنید و تجزیه شده هر عدد را هم بنویسید. سپس سطرهای

بعدی را مانند نمونه کامل کنید.

عدد	$۶ = ۲ \times ۳$	۷	$۹ = ۳^۲$				
مربع عدد	$۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$	$۴۹ = ۷^۲$					

مکعب عدد	$216 = 2^3 \times 3^3$	$343 = 7^3$				
----------	------------------------	-------------	--	--	--	--

الف) سطرهای هر ستون را با هم مقایسه کنید و الگویی را که مشاهده می کنید، توضیح دهید.

ب) با توجه به قسمت قبل مربع  $2^5$  را به صورت توان دار بنویسید.

ج) فکر می کنید حاصل  $17^6$  مربع چه عددی است؟ مکعب چه عددی؟

د) آیا  $17^3 \times 5^2$  مربع کامل است؟

ه) کوچکترین عددی را که حاصل ضرب آن در  $2^3 \times 3^4$  مربع کامل است، پیدا کنید.

و) کوچکترین عددی را که حاصل ضرب آن در  $2^3 \times 3^4$  مکعب کامل است، پیدا کنید.

۳. عدد ۱۰۱ کوچکترین عدد اول سه رقمی است و تنها دو شمارنده دارد: ۱ و ۱۰۱.

الف) یک مضرب ۱۰۱ را پیدا کنید که تنها سه شمارنده داشته باشد. مسیر فکریتان را توضیح دهید و بگویید به این ترتیب چند پاسخ مختلف می توان برای این مسئله پیدا کرد.

ب) یک مضرب ۱۰۱ را پیدا کنید که تنها چهار شمارنده داشته باشد. مسیر فکریتان را توضیح دهید و بگویید به این ترتیب چند پاسخ مختلف می توان برای این مسئله پیدا کرد.

۴. چند تا صفر در سمت راست حاصل ضرب ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد؟

### استفاده از ابزارهای فناوریانه

وبگاه *ولفرام آلفا* (Wolfram Alpha) یک موتور محاسباتی دانش است که هسته اصلی آن نرم افزار محاسباتی متمتیکا (Mathematica) است. برخلاف دیگر موتورهای جست و جو که معمولاً گزیده ای از وب را در اختیار کاربر می گذارند، *ولفرام آلفا* این اطلاعات را پردازش کرده و سپس در اختیار کاربر قرار می دهد. *ولفرام آلفا* قادر است به بسیاری از سؤالاتی که دیگر موتورهای جست و جو قادر به جوابگویی به آنها نیستند، پاسخ دهد. یکی از مهم ترین و

کاربردی‌ترین قسمت‌های این موتور جست‌وجو، توانایی آن در حلّ مسائل ریاضی است. شما می‌توانید به وسیلهٔ این موتور جست‌وجو، محاسبات ریاضیاتی را که مورد نظرتان است به راحتی و در عرض چند ثانیه حل کنید. مثلاً می‌توانید معادله‌ای پیچیده را به *ولفرام آلفا* داده و جواب آن را بگیرید، یا می‌توانید نمودارهای مورد نظر خودتان را به این موتور جست‌وجو بدهید تا برایتان رسمشان کند. همچنین می‌توانید اطلاعات جالبی پیرامون اعداد به دست آورید.

برای نمونه با وارد کردن عبارت «factor 200» اطلاعات زیر در صفحه نمایش داده می‌شود:

The screenshot shows the WolframAlpha interface with the search bar containing 'factor 200'. Below the search bar, there are icons for various input methods and links for 'Examples' and 'Random'. A message states: 'Assuming "factor" is referring to a factorization computation | Use as a word instead'. Under 'Input interpretation:', the input 'factor 200' is shown. The 'Prime factorization:' section displays  $2^3 \times 5^2$  (5 prime factors, 2 distinct). The 'Divisors:' section lists 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200 (12 divisors). Handwritten Persian text 'تجزیه ۲۰۰' is placed over the prime factorization, and '۱۲ شمارندهٔ ۲۰۰' is placed over the divisors list. At the bottom, there is a 'Download page' link and the text 'POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE'.

دانش‌آموزان می‌توانند با کمک این ابزار، عددهای طبیعی را تجزیه کنند و شمارنده‌های هر عدد را بیابند و به این ترتیب به سادگی، درستی یا نادرستی عبارتهایی مانند گزینه‌های سؤال زیر را بررسی کنند:

درستی یا نادرستی هر عبارت را بررسی کنید (برای نشان دادن نادرستی هر جمله کافی است یک مثال بزنید که نشان دهد آن عبارت نادرست است، برای نشان دادن درستی هر جمله باید دلیل بیاورید). عدد  $a^2$  مربع عدد طبیعی  $a$  است.

الف) توان هر یک از عددهای اول در حاصل تجزیه  $a^2$  دو برابر توان آن عدد اول در حاصل تجزیه  $a$  است.

ب) تعداد شمارنده‌های  $a^2$  دو برابر تعداد شمارنده‌های  $a$  است.

نشانی وبگاه *ولفرآم آلفا* : <http://www.wolframalpha.com>

همچنین می‌توانید با ابزارهایی مثل ماشین حساب، مسئله‌های مختلف را برای دانش‌آموزان طرح کنید. برای مثال:

۱. از دانش‌آموزان بخواهید با ماشین حساب، بزرگ‌ترین عدد اول ۳ رقمی یا ۴ رقمی را بیابند.

۲. کوچک‌ترین عدد اول ۳ رقمی یا ۴ رقمی را پیدا کنید.

### معرفی منابع برای معلمان

- مقسوم‌علیه و مضرب از مجموعه کتاب‌های دانش پایه؛ تألیف زهره پندی؛ انتشارات مدرسه.
- کارگاه اعداد از مجموعه کارگاه ریاضی؛ تألیف آرش رستگار؛ انتشارات فاطمی.
- ریاضیات برای معلمان؛ تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی. ال. مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی‌زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل ۱۰.
- تاریخ ریاضیات؛ جلد اول؛ ترجمه قاسم وحیدی‌اصل؛ انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

### نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- الف) به روش غربال عددهای اول بین ۲۰ تا ۵۰ را مشخص کنید.  
ب) پنجمین عددی که خط زدید، چه عددی بود؟  
ج) آخرین عددی که خط زدید، چه عددی بود؟ این عدد، مضرب کدام عدد اول بود؟
۲. در غربال عددهای ۱ تا ۲۰۰ خط زدن مضارب را تا مضارب کدام عدد اول ادامه می‌دهید؟ چرا؟
۳. برای تشخیص اول یا مرکب بودن عدد ۲۱۷ این عدد را حداکثر به چند عدد اول باید تقسیم کرد؟ چرا؟
۴. بزرگ‌ترین عدد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ کدام است؟
۵. عدد ۱۱۹ اول است یا مرکب؟ چرا؟

## یادآوری عددهای اول

### هدف

۱. تشخیص مرکب بودن مضارب یک عدد طبیعی
۲. تجزیه عددهای مرکب به عددهای اول با روش‌های مختلف
۳. طبقه‌بندی عددهای طبیعی به سه دسته: (۱، اول و مرکب)
۴. درک عددهای طبیعی نسبت به هم اول و ارتباط آن با عددهای مرکب
۵. تعیین عددهای اول کمتر از عدد طبیعی به روش غربال
۶. تعیین اول یا مرکب بودن یک عدد طبیعی با تقسیم کردن
۷. درک ارتباط بین روش غربال و روش تقسیم کردن به عددهای اول

### ابزار مورد نیاز

جدول اعداد ۱ تا ۱۰۰ که در آن عددهای اول مشخص شده است.

### روش تدریس

هدف کلی این درس، یادآوری عدد اول است. ابتدا با یادآوری عددهای طبیعی، شمارنده‌ها، مضرب‌ها و ...، عددهای اول را به صورت‌های مختلف دوباره تعریف می‌کنیم و نحوه پیدا کردن عددهای اول به روش نمودار درختی، تقسیم کردن، به صورت ضرب نوشتن و استفاده از قاعده‌های بخش‌پذیری یادآوری می‌شود. از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت را ابتدا به صورت فردی حل کنند، سپس در کلاس به بررسی پاسخ‌ها پردازید.

این نکته که عددهای اول را نمی‌توان به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از ۱ نوشت و اینکه تنها دو مقسوم‌علیه دارند (۱ و خودشان) را بیان کنید.



برای ایجاد انگیزه، می‌توانید مسابقه‌ای به صورت زیر طراحی کنید:

چند دانش‌آموز را انتخاب کنید. از هر کدام عددی را پرسید و سپس آنها را از کوچک‌ترین عدد انتخابی به بزرگ‌ترین عدد در یک ردیف قرار دهید. پس از آن، بازه‌هایی از عددهای طبیعی را انتخاب کنید (مثلاً ۱ تا ۵۷) و از آنها بخواهید به نوبت عددهای غیراول را حذف کنند. کسی برنده است که عدد خاصی را که قبلاً شما مشخص کرده‌اید (مثلاً ۴۲) را حذف کند.

از روش‌های ساده‌تر و کوتاه‌تر دیگر هم می‌توانید برای ایجاد انگیزه استفاده کنید، به‌طور مثال از دانش‌آموزان پرسید آیا همه عددهای فرد، عدد اول‌اند؟ آیا می‌توان گفت عددهای فرد، یکی در میان، عدد اول‌اند؟

هدف فعالیت اول این درس در صفحه ۲۰ یادآوری شمارنده‌ها و اینکه عددهای اول تنها دو شمارنده دارند و تجزیه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک به عامل‌های اول است.

در «کار در کلاس» صفحه ۲۱ هم، تعریف عدد مرکب آمده است و تأکید شده اگر عدد طبیعی به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشته شود، عدد مرکب است. در فعالیت صفحه ۲۱، دانش‌آموزان با تقسیم شدن عددهای طبیعی به سه دسته (اول، مرکب و یک) آشنا می‌شوند و یاد می‌گیرند که ضرب‌های یک عدد (غیر از اولین مضرب عددهای اول) همه مرکب هستند. این موضوع، زمینه‌سازی برای روش غربال در درس جبر است.

در «کار در کلاس» صفحه ۲۲، دانش‌آموزان تمرین می‌کنند اگر عددی اول باشد، اولین مضربش که خودش است، اول است و بقیه مضارب آن مرکب است و اگر عددی مرکب باشد، تمام مضرب‌هایش مرکب خواهد بود.

در فعالیت صفحه ۲۲، ب.م.م. و ک.م.م. یادآوری می‌شود و اینکه دو عدد نسبت به هم اول تعریف می‌شود. در این فعالیت، هدف صرفاً معرفی عددهای نسبت به هم اول نیست بلکه منظور آشنا کردن دانش‌آموزان به عامل مشترک بین دو عدد است. دو عدد مرکب می‌توانند نسبت به هم اول باشند یعنی هیچ عامل مشترکی ندارند. برای مثال ۸ و ۹ نسبت به هم اول هستند. عامل سازنده عدد ۸، عدد اول ۲ است و عدد اول ۳، عامل سازنده عدد ۹ است. چون عامل مشترک ندارند نسبت به هم، اول می‌شوند اما خودشان مرکب هستند.

## حل بعضی از تمرین‌ها

در تمرین‌های صفحه ۲۳ چند هدف دنبال شده است. در تمرین ۳، هدف این است که دانش‌آموزان متوجه شوند عدد ۱، نه اول و نه مرکب است (مرکب  $= 1-8-20$ ).

در تمرین ۷ نیز آنچه که خیلی اهمیت دارد، این است که:

- اگر عددی بر ۴ بخش پذیر باشد، حتماً بر ۲ بخش پذیر است.

- اگر عددی بر ۹ بخش پذیر باشد، حتماً بر ۳ بخش پذیر است.

- اگر عددی بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد، حتماً بر ۶ بخش پذیر است.

- اگر عددی بر ۴ و ۹ بخش پذیر باشد، حتماً بر ۱۸ و ۳۶ بخش پذیر است.

## توصیه‌های آموزشی

توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کنید که عددهای اول و مرکب در خصوص عددهای طبیعی تعریف می‌شوند. بنابراین طرح این سؤال که عدد ۴- اول است یا مرکب، معنی ندارد.

## اشتباهات رایج دانش‌آموزان

۱. یکی از مهم‌ترین اشتباهات رایج دانش‌آموزان این است که فکر می‌کنند عدد ۱، اول است.
۲. فکر می‌کنند اگر ۲، عدد شمارنده عدد A باشد، حتماً ضرب آنها هم، شمارنده A است. مثلاً اگر ۴ و ۶، شمارنده‌های A باشد، فکر می‌کنند حتماً ۲۴ هم شمارنده A است.

## تعیین عددهای اول

### هدف

۱. مراحل مختلف روش غربال را درک و کشف کند.
۲. روش غربال را در پیدا کردن عددهای اول در یک محدوده مشخص اعداد طبیعی به کار ببرد.
۳. روش تقسیم کردن برای تشخیص اول بودن یک عدد را درک کند و ضمن مقایسه آن با روش غربال، آن را به کار ببرد.

### ابزار مورد نیاز

ماشین حساب

### روش تدریس

هدف کلی این درس، آشنا کردن دانش آموزان با روش غربال برای تعیین عددهای اول کمتر از عدد طبیعی است، ضمن آنکه با مفهوم الگوریتم (مراحل روش حل یک مسئله) و نحوه ارائه آن در قالب یک فلوچارت آشنا می شوند. در روش غربال دو نکته مهم است: اول آنکه، مضارب عددهای اول را خط می زنیم (برای مثال مضارب عدد ۶ را خط نمی زنیم چون این مضارب قبل از آن با مضرب های ۲ و ۳ خط خورده اند)؛ دوم اینکه، خط زدن مضرب ها را تا عدد اولی ادامه می دهیم که مربع آن عدد اول در بین عددهای نوشته شده وجود داشته باشد، چرا که اولین مضربی که خط می خورد مربع آن عدد اول است، بقیه مضرب های کمتر از آن با مضارب عددهای اول قبلی، خط خورده اند. برای مثال وقتی مضرب های ۷ را خط می زنیم:  $2 \times 7$ ،  $3 \times 7$ ،  $4 \times 7$ ،  $5 \times 7$ ،  $6 \times 7$ ، قبل از آن با مضرب های ۲، ۳ و ۵ خط خورده اند اما  $7 \times 7$ ، هنوز خط نخورده است. بنابراین کار با  $7 \times 7 = 49$ ، شروع می شود. پس اگر ۴۹ در میان عددهای ما نیست، کار خط زدن عددهای اول را متوقف کنیم.

در تعیین اول یا مرکب بودن یک عدد طبیعی نیز همین کار را انجام می دهیم. فقط به عددهای اول تقسیم می کنیم و تقسیم کردن را تا عدد اولی ادامه می دهیم که مربع آن از عدد مورد نظر ما کمتر باشد. هدف اصلی درس، مقایسه روش غربال با تقسیم است و اینکه دانش آموزان درک کنند، این دو روش در واقع یکی است.

هدف کلی فعالیت صفحه ۲۴، روش غربال و تشخیص اینکه تا کجا باید خط زدن‌ها را ادامه دهند، است. ابتدا از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت صفحه ۲۴ را حل کنند و پاسخ‌های خودشان را با دیگران مقایسه کنند. سپس شما با کمک دانش‌آموزان، پاسخ‌های صحیح را بیان کنید و سعی کنید اشکالات دانش‌آموزان را در این فعالیت رفع کنید. اگر می‌توانید شما هم اعداد را روی تخته بنویسید و سپس از رنگ‌های مختلف برای خط زدن‌ها استفاده کنید. در فعالیت و کار در کلاس صفحه ۲۶، دانش‌آموزان باید تشخیص دهند که یک عدد را حداکثر به چند عدد اول باید تقسیم کنند تا تشخیص دهند اول است یا مرکب.

### حل بعضی تمرین‌ها

سؤال ۵ از این جهت اهمیت دارد که دانش‌آموزان متوجه می‌شوند در غربال عددهای طبیعی ۱ تا  $n$ :

- اولین عددی که خط می‌خورد عدد ۱ است.

- در مرحله حذف مضرب‌های ۷، اولین عددی که قبلاً خط نخورده و خط می‌خورد  $7^2$  یعنی ۴۹ است.

- عدد ۲۴ که دو مقسوم‌علیه اول ۲ و ۳ را دارد، دو بار خط می‌خورد و اولین بار عدد ۲۴ با مضرب‌های ۲ خط می‌خورد.

- تمام مضارب ۵ که قبلاً خط نخورده‌اند (مانند ۲۵ و ۳۵ و ۵۵ و ۶۵ و ۸۵ و ۹۵) آنهایی هستند که مضارب

۲ و ۳ نیستند.

### توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود در یک طرف تخته، روش غربال را برای عددهای ۱ تا ۵۰ انجام دهید و در طرف دیگر تخته،

مراحل تقسیم برای تشخیص اول بودن عدد ۴۷ را بنویسید. مرحله به مرحله، این دو کار را با هم مقایسه کنید. برای

مثال عدد ۴۷ با مضرب‌های ۲ خط نمی‌خورد، یعنی اگر ۴۷ را بر ۲ تقسیم کنیم، باقی‌مانده می‌آورد.

### اشتباهات رایج دانش‌آموزان

معمولاً دانش‌آموزان، عددهای فرد و عددهای اول را مثل هم می‌بینند؛ مثلاً فکر می‌کنند عدد ۹۱، عدد اول

است. لطفاً در این مبحث به اعداد مرکبی مانند ۱۱۹ و ۱۴۳ و ۱۶۹ و ۱۸۷ و ...، تأکید کنید.

## چندضلعی‌ها و تقارن

### \*هدف

۱. تشخیص چندضلعی و چندضلعی منتظم
۲. دَوَران ۱۸۰ درجه یک شکل و درک ارتباط آن با مرکز تقارن
۳. تشخیص مرکز تقارن
۴. دَوَران یک شکل به اندازه دلخواه

### \*ابزار مورد نیاز

کاغذ شطرنجی

کاغذ پوستی

### \*روش تدریس

هدف کلی این درس، یادآوری تبدیلات هندسی و دسته‌بندی چندضلعی‌ها و آشنایی دانش‌آموزان با مرکز

تقارن و ارتباط آن با دَوَران مرکزی است.

درس با تعریف چندضلعی و چندضلعی منتظم آغاز می‌شود و دَوَران چندضلعی‌های منتظم، ادامه می‌یابد. سپس مرکز دَوَران تعریف می‌شود و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا با کمک دَوَران، تعیین کنند نقاط مشخص شده در کدام‌یک از چندضلعی‌های منتظم، مرکز تقارن هستند.

در انجام فعالیت‌ها، لازم است هر دانش‌آموز دَوَران شکل‌ها را با استفاده از کاغذ پوستی، تجربه کند.

پس از این تجربه، می‌توانید تکنیک معرفی شده برای دَوَران هر شکل به اندازه دلخواه را در کلاس مطرح کنید. این تکنیک در فعالیت (۵) صفحه ۳۲ کتاب آمده است.

در فعالیت (۳) صفحه ۳۲ و تمرین (۱) صفحه ۳۳ از دانش‌آموزان خواسته شده تا دربارهٔ نه‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم، اظهار نظر کنند.

این فعالیت و تمرین می‌تواند به عنوان فرصتی برای گفت‌وگوی کلاسی مورد استفاده قرار گیرد و دانش‌آموزان می‌توانند نظرات خود را همراه با دلیل، بیان کنند.

### **\*حل بعضی از تمرین‌ها**

هدف تمرین (۱) صفحه ۳۳، یادآوری محور تقارن است. در زمان انجام این تمرین، می‌توانید ارتباط خط تقارن و تقارن محوری را در کلاس مطرح کنید:

اگر نتیجهٔ تقارن محوری یک شکل حول یک خط روی آن منطبق شود، می‌گوییم آن خط، خط تقارن شکل است.

در این تمرین، تعداد خط تقارن‌های چندضلعی‌های منتظم خواسته شده است. تعداد خط تقارن هر چندضلعی منتظم برابر تعداد ضلع‌های آن است.

### **\*نوصیه‌های آموزشی\***

استفاده از کاغذ پوستی، کاغذ شطرنجی و رسم شکل‌ها روی کاغذ و تا کردن آنها، تجربه‌هایی است که می‌تواند شهود هندسی دانش‌آموزان را تقویت کند و آنها را برای ورود به سطوح بالاتر هندسه آماده‌تر نماید. شما می‌توانید از فرصت‌های مختلف این درس برای این منظور استفاده کنید.

### **\*اشتباهات رایج دانش‌آموزان\***

یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان عدم تشخیص درست خط‌های تقارن و داشتن یا نداشتن مرکز تقارن در شکل‌های مختلف است. مثلاً فکر می‌کنند قطرهای متوازی‌الاضلاع، خط تقارن آن هستند یا اینکه پنج‌ضلعی منتظم، مرکز تقارن دارد. استفاده از ابزار مناسب و تجربه می‌تواند به دانش‌آموزان در برطرف کردن این اشتباهات، کمک کند.

## توازی و تعامد

### \*هدف\*

۱. آشنایی با ارتباط میان زاویه‌های بین خطوط موازی و مورب
۲. به‌کارگیری این ارتباط در یافتن زاویه‌های مجهول
۳. استفاده از زبان ریاضی برای بیان استدلال‌های ساده

### \*ابزار مورد نیاز\*

کاغذ شطرنجی

### \*روش تدریس\*

هدف کلی این درس، آشنا کردن دانش‌آموزان با ارتباط میان زاویه‌های بین خطوط موازی و مورب است. درس با تعریف دو خط موازی، آغاز می‌شود و با بیان ارتباط میان زاویه‌ها، ادامه می‌یابد. سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا با استفاده از این ارتباط، به استدلال و حل مسئله پردازند.

بیان استدلال‌های ساده به زبان ریاضی و آشنایی با ارتباط میان خطوط موازی و عمود، قسمت دوم درس را کامل می‌کند.

در تعریف دو خط موازی، تعریفی غیر از تعریف رایج آن مطرح شده است. دقت کنید که در این سطح از هندسه قرار نیست دانش‌آموزان هندسه اقلیدسی را از صفر آغاز کنند و هر قضیه را بر اساس قضایای ثابت شده قبلی ثابت کنند، بلکه هدف، تجربه‌های کوتاه هندسی و درگیر شدن با مفاهیم هندسه است.

هر دو «کار در کلاس» صفحه ۳۷، نمونه‌ای از این تجربه‌های کوتاه است.



در «کار در کلاس» (۱) مثلث‌های مختلفی می‌توان رسم کرد، بنابراین می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید به صورت فردی به حل «کار در کلاس» بپردازند و سپس پاسخ‌هایشان را با هم، مقایسه کنند. در این تجربه، دانش‌آموزان به کمک خط تقارن، استدلالی برای مساوی بودن دو زاویه مجاور قاعده در مثلث متساوی‌الساقین، ارائه می‌کنند. لازمه حل «کار در کلاس» (۲)، درک دانش‌آموزان از خطوط موازی و تعریف متوازی‌الاضلاع است. خوب است فرصت کافی در اختیار آنها قرار دهید تا هر سه پاسخ این مسأله را به دست آورند.

### **\*حل بعضی تمرین‌ها**

اهمیت تمرین (۳) استفاده از جبر در حل یک مسأله هندسه است. معادله لازم برای یافتن  $X$  در شکل وسط  $2x - 25 = 155$  و در شکل سمت راست  $x + 40 = 60$  است.

### **\*توصیه‌های آموزشی**

استفاده از یک تخته کوچک شطرنجی شده در کلاس، می‌تواند بحث پیرامون سؤال‌هایی که به این ابزار نیاز دارد را ساده‌تر کند.

### **\*اشتباهات رایج دانش‌آموزان**

یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، عدم تشخیص درست زاویه‌های میان خطوط موازی و مورب در شکل‌های شلوغ است. استفاده از رنگ‌های یکسان برای مشخص کردن خطوط موازی، می‌تواند بروز این اشتباه را کاهش دهد.

### **چهار ضلعی‌ها**

## \*هدف

۱. آشنایی با تعریف متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع و لوزی
۲. استفاده از تقارن‌ها در یافتن خاصیت‌های چهارضلعی‌های خاص

## \*ابزار مورد نیاز

کاغذ شطرنجی

کاغذ پوستی

## \*روش تدریس

هدف کلی این درس، آشنایی با چهارضلعی‌های خاص و خواص آنها است.

درس با تعریف متوازی الاضلاع آغاز می‌شود. سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا با توجه به این حقیقت که متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد، چند خاصیت آن را بیان کنند.

تشخیص متوازی الاضلاع‌ها در میان شکل‌های فعالیت، قدم بعدی است که دانش‌آموزان را در درک این نکته که مستطیل، لوزی و مربع، نوعی متوازی الاضلاع هستند، کمک می‌کند.

سپس تعریف مستطیل، مربع و لوزی با توجه به متوازی الاضلاع بودن آنها ارائه شده است و این مطلب که این چهارضلعی‌ها خواص متوازی الاضلاع را دارند، مورد تأکید قرار می‌گیرد.

استفاده از تقارن‌های یکی از این چهارضلعی‌ها برای یافتن خاصیت‌های دیگر آن به عنوان نمونه در «کار در کلاس»، آمده است.

در «کار در کلاس» بعد از آن هم نمونه‌ای دیگر از استدلال روایی، آمده است. لازم است دانش‌آموزان برای درک بهتر استدلال‌های ارائه شده در کتاب، شکل‌های مختلف را با کاغذ بسازند و برابری زاویه‌ها، ضلع‌ها، قطر‌ها یا منصف بودن قطر‌ها، و دَوَران و تقارن شکل‌ها را مشاهده کنند و روند استدلال را با زبان خود بیان کنند.

### \*حل بعضی از تمرین‌ها

قسمت (الف) و (ب) تمرین (۱)، تمرینی برای ارائه استدلال به زبان فارسی یا ریاضی است.

(الف)	$\overline{AD} = \overline{DC}$	(چون ABCD لوزی است)	}	$\Rightarrow$	$\overline{AD} = \overline{CE}$
	$\overline{CE} = \overline{DC}$	(چون DCEF مربع است)			
(ب)	$AB \parallel DC$	(چون ABCD لوزی است)	}	$\Rightarrow$	$AB \parallel EF$
	$EF \parallel DC$	(چون DCEF مربع است)			

تمرین (۲) نیز تمرینی برای استفاده از تقارن‌ها در یافتن خاصیت‌های یکی از چهارضلعی‌های خاص است. در لوزی قطر‌ها بر هم عمودند.

تمرین بعدی نیز، تمرینی برای ارائه استدلال است؛ استدلال لازم برای مستطیل بودن. چهارضلعی مورد نظر در تمرین (۳) همان استدلالی است که هادی در «کار در کلاس» (۳) صفحه ۴۱، ارائه کرده است.

تمرین ۴:

ب) نادرست

الف) درست

د) درست

ج) نادرست

دقت کنید که هر کدام از این جمله‌های نادرست در شرایط خاصی، درست‌اند اما چون در حالت کلی، مورد سؤال قرار گرفته‌اند، نادرست ارزیابی شده‌اند.

### \* توصیه‌های آموزشی

ساختن چهارضلعی‌های کاغذی در اندازه‌های بزرگ، مشخص کردن خط تقارن در مرکز تقارن روی آنها و استفاده از آنها در بحث‌های کلاسی، می‌تواند در این درس، کمک‌کننده باشد، گرچه جای تجربه فردی دانش‌آموزان را نمی‌گیرد.

### \* اشتباهات رایج دانش‌آموزان

یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، درک نادرست از تعریف برخی چهارضلعی‌های خاص است؛ مثلاً فکر می‌کنند لوزی، نوعی چهارضلعی با ضلع‌های روبه‌روی موازی است که چهار ضلع برابر دارد و زاویه قائمه ندارد! تأکید بر رجوع به تعریف در تشخیص لوزی‌ها از میان شکل‌هایی که مربع هم در میان آنها دیده می‌شود، می‌تواند در برطرف کردن این اشتباه، کمک‌کننده باشد.

### زاویه‌های داخلی

\*هدف

۱. آشنایی با کاشی کاری
۲. کاشی کاری با مثلث‌های هم‌نهشت و یافتن رابطه مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث
۳. یافتن رابطه مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
۴. یافتن رابطه‌اندازه هر زاویه در یک چندضلعی منتظم
۵. استفاده از زبان ریاضی در بیان رابطه‌های ساده

### \* ابزار مورد نیاز

کاغذ پوستی

### \* روش تدریس

هدف اصلی این درس، بررسی رابطه مجموع زاویه‌های داخلی در چندضلعی‌ها است. کاشی کاری به عنوان یکی از هنرهای ایرانی، اسلامی که کاربردی از هندسه به حساب می‌آید به عنوان زمینه‌ای برای این درس انتخاب شده است. درس با تعریف کاشی کاری آغاز می‌شود و بلافاصله کاشی کاری با مثلث‌های هم‌نهشت برای درک و یافتن رابطه مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث، مطرح می‌گردد.

پس از آن رابطه مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی و هر یک از زاویه‌های یک چندضلعی منتظم، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

سپس در «کار در کلاس» و تمرین، اندازه زاویه‌های چندضلعی‌های منتظم در بررسی کاشی‌کاری‌های مختلف به کار گرفته می‌شود.

«کار در کلاس» (۴) صفحه ۴۴ به بررسی چندضلعی‌های منتظمی که در کاشی‌کاری با یک نوع کاشی می‌توان از آنها استفاده کرد، می‌پردازد. خوب است پیش از انجام این «کار در کلاس» دانش‌آموزان چندضلعی‌های منتظم و هم‌نهشت مختلفی بسازند و سعی کنند، تنها با یک نوع از آنها یک سطح را کاملاً بپوشانند. این تجربه می‌تواند به آنها در ارائه استدلال برای اینکه چرا از میان شکل‌های منتظم فقط ۳، ۴ و ۶ ضلعی را می‌توان در کاشی‌کاری با یک نوع کاشی استفاده کرد، کمک کند.

### \*حل بعضی از تمرین‌ها

در تمرین (۲) یک کاشی‌کاری با یک نوع کاشی غیرمنتظم، آمده است. این کاشی‌کاری با کاشی‌های لوزی‌شکل که زاویه‌های ۶۰ و ۱۲۰ درجه دارند، ساخته شده است.

در تمرین (۳) برابر قرار دادن عبارت  $\left(\frac{(n-2) \times 180}{n}\right)$  که اندازه‌ی زاویه داخلی یک  $n$  ضلعی منتظم است، با عدد ۱۳۵ و حدس و آزمایش می‌تواند به پاسخ  $n = 8$  منجر شود.

در شکل (ب) تمرین (۵) یک چهارضلعی مقعر، نشان داده شده و از دانش‌آموزان خواسته شده است تا مجموع زاویه‌های داخلی آن را به دست آورند.

این تمرین، مقدمه‌ای است برای درس بعدی که در آن زاویه خارجی تنها برای چندضلعی‌های محدب، تعریف می‌شود.

مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی مقعر، برابر مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی محدب با همان تعداد ضلع است.

### **\* توصیه‌های آموزشی**

استفاده از چندضلعی‌های کاغذی و تجربه عملی کاشی‌کاری می‌تواند به دانش‌آموزان در نیل به اهداف این درس کمک کند.

### **\* اشتباهات رایج دانش‌آموزان**

در فعالیت (۱) صفحه ۴۲ بر کاشی‌کاری با یک نوع کاشی، تأکید شده است. در شکل پایین این فعالیت، کاشی‌کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است اما می‌تواند مثالی برای کاشی‌کاری با دو نوع کاشی باشد. تأکید بر این نکته می‌تواند از بروز اشتباه دانش‌آموزان در تشخیص مصداق کاشی‌کاری که یکی از اشتباهات رایج آنهاست، جلوگیری کند.

### **زاویه‌های خارجی**

## \*هدف

۱. آشنایی با زاویه خارجی و تشخیص آن در چندضلعی‌های محدب
۲. یافتن رابطه زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن
۳. آشنایی با تفاوت میان مثال زدن و استدلال در حالت کلی
۴. آشنایی با ارائه مثال نقض برای نقض یک حکم کلی
۵. یافتن رابطه مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
۶. استفاده از زبان ریاضی در بیان رابطه‌های ساده

## \*ابزار مورد نیاز

کاغذ پوستی

## \*روش تدریس

هدف اصلی این درس، آشنا کردن دانش‌آموزان با تفاوت میان مثال و استدلال در حالت کلی است. ضمن آنکه در ادامه درس قبل دانش‌آموزان با زاویه خارجی آشنا می‌شوند و رابطه مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی را به دست می‌آورند.

درس با تعریف زاویه خارجی در یک چندضلعی محدب، آغاز می‌شود. سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا مصادیق آن را در شکل‌ها، پیدا کنند و به کمک آنچه در درس‌های قبلی یاد گرفته‌اند، زاویه‌های مجهول در «کار در کلاس» صفحه ۴۶ را بیابند.



سپس رابطه زاویه خارجی یک رأس مثلث با دو زاویه داخلی غیرمجاورش در قالب چند مثال بررسی و در حالت کلی به دست می آید و تفاوت مثال زدن با استدلال در حالت کلی مورد توجه قرار می گیرد.

سپس در «کار در کلاس» صفحه ۴۷ یک حکم کلی نادرست، ارائه می شود و از دانش آموزان خواسته می شود تا با ارائه مثال نقض، آن را رد کنند.

فعالیت بعدی به رابطه مجموع زاویه های خارجی یک چندضلعی می پردازد و این رابطه به صورت ریاضی، نوشته می شود.

در «کار در کلاس» صفحه ۴۹ از رابطه مجموع زاویه های خارجی در یافتن زاویه داخلی یک چندضلعی منظم استفاده می شود.

### **\* حل بعضی تمرین ها**

تمرین (۳) یک اثباتروایی برای  $360^\circ$  درجه بودن مجموع زاویه های خارجی در هر چندضلعی محدب ارائه می کند. لاک پشت این تمرین، در هر گوشه شکل به اندازه زاویه خارجی می چرخد تا بتواند مسیرش را روی ضلع بعدی ادامه دهد و چون لاک پشت در یک دور کامل در هر چندضلعی محدب  $360^\circ$  درجه می چرخد، پس مجموع زاویه های خارجی در هر چندضلعی محدب  $360^\circ$  درجه است.

### **\* توصیه های آموزشی**

فعالیت صفحه ۴۷ یکی از مهم ترین فعالیت های این بخش کتاب است. برای انجام این فعالیت، فرصت کافی در نظر بگیرید و به تفاوت میان مثال زدن و ارائه استدلال در حالت کلی، تأکید کنید.

## \* اشتباهات رایج دانش‌آموزان

یکی از مشکلات رایج دانش‌آموزان، ارائهٔ یک حکم کلی بدون داشتن استدلال کافی برای آن است. فراهم کردن فرصتی برای دانش‌آموزان جهت گفت‌وگو، بیان استدلال و سعی در قانع کردن یکدیگر می‌تواند در طولانی مدت، بروز این مشکل را کاهش دهد.

## فصل چهارم - جبر و معادله

### راهنمای معلم - ریاضی هشتم

#### نگاه کلی به فصل

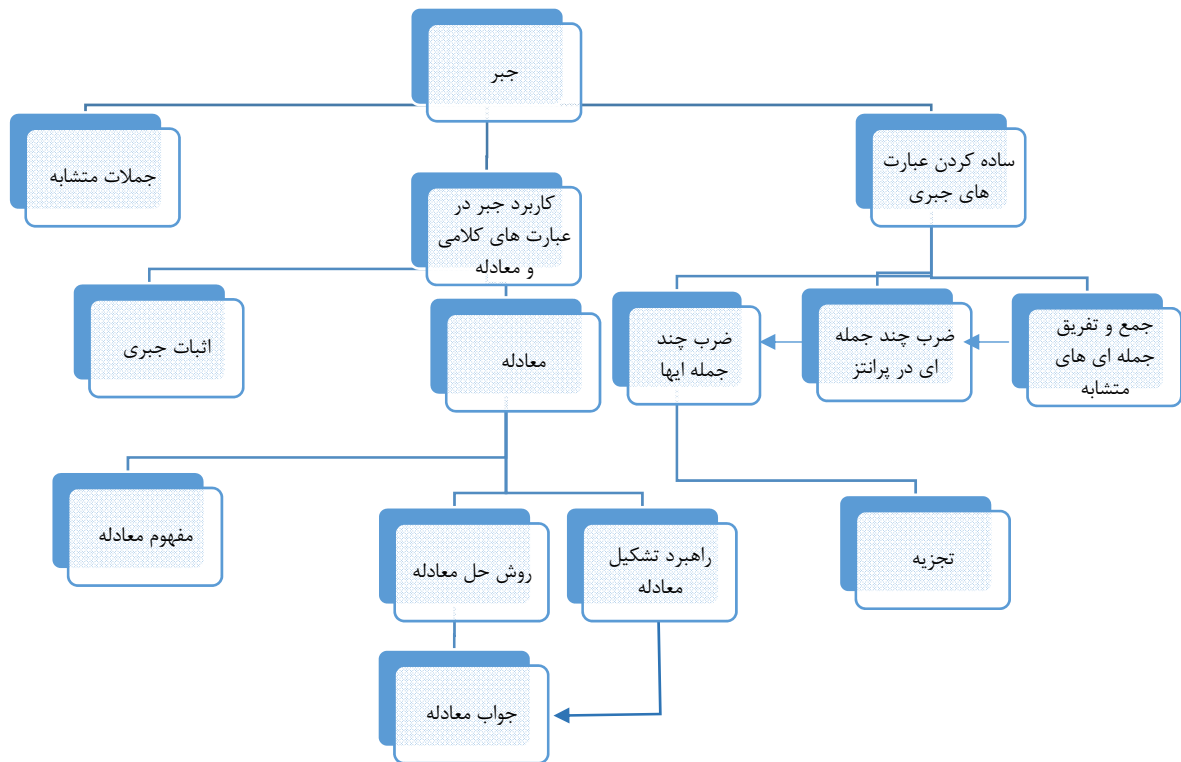
در پایه هفتم دانش آموزان با جبر و معادله آشنا شده اند. ع درس این فصل به یادآوری مطالب هفتم و ساده کردن عبارت های جبری و معادله می پردازد.

درس با عبارت های کلامی به جبری شروع شده و با ارائه الگوهای مختلف یک شکل به بیان نحوه ساده کردن عبارت های جبری می پردازد.

سپس با جمع و تفریق جملات متشابه و پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت جبری و استفاده از عبارت جبری در بیان مساحت دنبال می شود.

در ادامه کمی هم بر لزوم اثبات های جبری تأکید می شود. دانش آموزان باید درک کنند که مثال های متعدد دلیل بر درستی فرضیه های همه ی اعداد نیست.

سپس تجزیه عبارت های جبری و معادله بیان می شود. در قسمت معادله، حل معادله با ضریب کسری آموزش داده می شود.



### تصویر عنوانی

جبر به معنی جبران کردن (برای ایجاد تعادل) هم می باشد. خوارزمی در کتاب «جبر و معادله» جبر را به معنای (جبران کردن) می گرفت. شبیه این جمله سعدی که «در جبر خاطر مسکین، بار بگردانی.» «مقابله» را به معنای حذف جمله های برابر در دو طرف معادله می گرفت. الکلنگ نماد بنایی از برقراری تعادل است.

## دانستی هایی برای معلم

### جبر و معادله

واژه‌ی «جبر» از نام کتاب محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی به نام «جبر و مقابله» گرفته شده است. در همه زبان ها این دانش را «جبر» می نامند.

خوارزمی در زمان مأمون عباسی می زیست. نخستین کسی است که کتاب مستقلی درباره جبر نوشت. این ریاضی دان و اخترشناس ایرانی، کتاب خود را به این قصد نوشت که راه حل معادله های درجه اول و درجه دوم را که در عمل و برای محاسبه و تقسیم ارث لازم بود، نشان دهد.

به زبان ریاضیات امروز، جبر به معنای انتقال جمله منفی از یک طرف برابری، به طرف دیگر است. «مقابله» (یعنی مقابل قرار دادن) را هم به معنای حذف جمله های برابر در دو طرف معادله می گرفت.

البته خوارزمی و ریاضیدانان بعد از او (که جبر را عمومی کرده)، حساب می دانستند. مثل کرجی، خیام و جمشید کاشانی.

این دانشمندان از حرف و نشانه ها برای نوشتن دستورها و فرمول ها استفاده نمی کردند و همه چیز را با زبان گفتار، بدون هیچ نمادی، شرح می دادند. نمادها خیلی بعد پیدا شد. برای نمونه، نماد برابری (=) در سده شانزدهم میلادی و به وسیله «روبرت رکورد» پزشک انگلیسی (۱۵۱۰-۱۵۵۸) که به ریاضیات هم علاقه داشت وارد ریاضیات شد.

در این باره خود «رکورد» می نویسد: «هیچ چیز، مانند دو پاره‌خط راست موازی و کوتاه، نمی تواند مفهوم برابری را برساند.»  
با این وجود، مدتی لازم بود تا این نماد، عمومی شود.  
برای نمونه:

«رنه دکارت» ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی (۱۶۵۰-۱۵۹۶) که نزدیک به صد سال بعد از «رکورد» می زیست، برای برابری از نشانه دیگری استفاده می کرد.  
نمادهای ساده ای که برای جمع (+) یا تفریق (-) به کار می بریم، برای نخستین بار در سال ۱۶۸۲ میلادی، در کتاب «حساب» اولبرخت واگنر و سپس در کتاب «رساله‌ای درباره حساب» یوهان دیدمان به کار برده شد.

**(این دو ریاضیدان آلمانی بودند و کتاب های آنها در لایپزیک چاپ شد.)**

خوارزمی، مجهول را «شیء» می نامید و همین واژه، وقتی به زبان های لاتینی رفت، « $x$ » نامیده شد.

ابتدا «فرانسوا ویت» (۱۶۰۳-۱۵۴۰) برای مجهول و هم ضریب های عددی از حرف های الفبای لاتینی استفاده کرد و «دکارت» هم که پس از او می زیست، همین روش را پذیرفت و حرف نخست الفبا یعنی  $a$  و  $b$  و ... را برای مقادیر معلوم و حرف های آخر الفبا را برای مقادیر مجهول به کار برد.

سپس «لایب نیتس» ریاضیدان آلمانی (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و نیوتن ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی در شکل گیری نمادها، نقش داشتند.

خوارزمی برای ضریب‌ها از عددهای درست و مثبت استفاده می‌کرد و به ریشه‌های منفی کاری نداشت.

در کتاب خوارزمی برای حل معادله به جز روش جبری، از روش‌های هندسی هم استفاده شده است.

«خیام» به جز معادله درجه دوم به گونه‌های مختلف معادله درجه سوم هم پرداخته است. (البته بیش‌تر به کمک هندسه جواب مثبت را به دست آورده است.) در مصر و بابل کهن و همچنین در دوران‌های جدیدتر در هند، با مقدمه‌های جبر آشنا بودند. با توجه به داده‌های مسئله می‌توانستند معادله را تشکیل دهند و برخی از گونه‌های آن را حل کنند. البته آن‌ها هم از حرف‌های الفبا برای نشان دادن مجهول و داده‌ها آگاهی نداشتند و نمی‌دانستند معادله را به صورت کلی خود تنظیم کنند.

در دوران ریاضیات کاربردی، عنصرهای جبری همچون  $x$  دانش حساب شمرده می‌شد. با وجود این، به ویژه بابلی‌ها به مرز بالایی از جبر رسیده بودند و می‌توانستند مسئله‌های عملی را که منجر به گونه‌هایی از معادله درجه دوم و در بعضی حالت‌ها، حتی درجه سوم شود، حل کنند. ریاضی‌دانان ایرانی، به معادله‌های بالاتر از درجه سوم اعتقادی نداشتند؛ زیرا فضای طبیعی را سه بعدی می‌دانستند و چون در فضا بیش از سه بعد نداریم، برای  $a^4$  و  $a^5$  و غیره معنایی قائل نبودند.

نخستین کسی که ریشه‌هایی مثبت معادله را در کنار ریشه‌های منفی آن، به حساب آورد. «کاردان» ریاضیدان ایتالیایی (۱۵۷۶-۱۵۰۱ میلادی) بود. او ریشه‌های منفی را «ساختگی» نامید و آن‌ها را قابل توجه نمی‌دانست.

### مسیرهایی برای توسعه

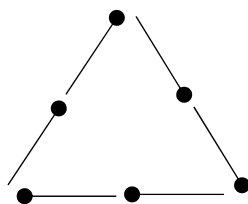
دنباله عددی یک، دو، سه، ... را در نظر بگیرید! این دنباله را می‌توان با الگوهای گوناگونی ادامه داد: مثلاً:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

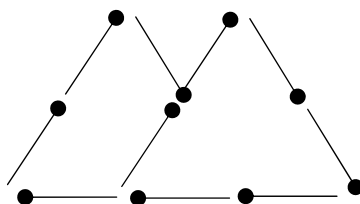
$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

وقتی یک سری عدد به دنبال هم می‌آیند، بدون آن که به مفهوم مشخصی مرتبط باشند نمی‌توان دلیل قابل اثباتی برای چگونگی ادامه آن‌ها ارائه کرد. برخی از الگوهای چوب کبریتی و شکلی می‌توانند تا حدودی روند ادامه یک الگوی عددی را توجیه کنند ضمن آن که فرصتی برای تعمیم الگو با روش‌های مختلف در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهند. در هر یک از مسأله‌هایی که در اینجا آمده است یک الگوی چوب کبریتی یا شکلی معرفی شده است، طرح این نوع مسأله‌ها می‌تواند مسیر خوبی برای توسعه تفکر جبری دانش‌آموزان باشد.

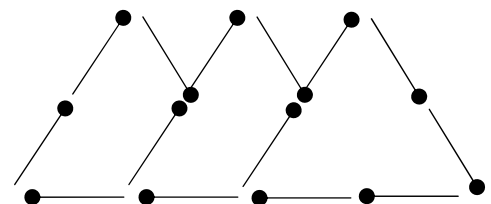
۱- الگوی چوب کبریتی زیر را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم:



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)





الف) جدول زیر را پر کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...	۱۰
تعداد							
چوب کبریت‌ها							

ب) تعداد چوب کبریت‌های لازم برای ساختن یکی از شکل‌ها ۳۰۲ تا است، چند

چوب کبریت برای ساختن شکل بعدی لازم است؟ شکل بعدی چطور؟

ج) چگونه می‌توانیم تعداد چوب کبریت‌های لازم برای ساختن شکل  $n$  ام را پیدا

کنیم؟

د) الگویی را که در قسمت (ج) توضیح داده‌اید، با یک عبارت جبری نمایش

دهید.

ه) پاسخ قسمت (ب) را در عبارت قسمت (د) پیدا کنید.

و) جدول زیر را پر کنید.

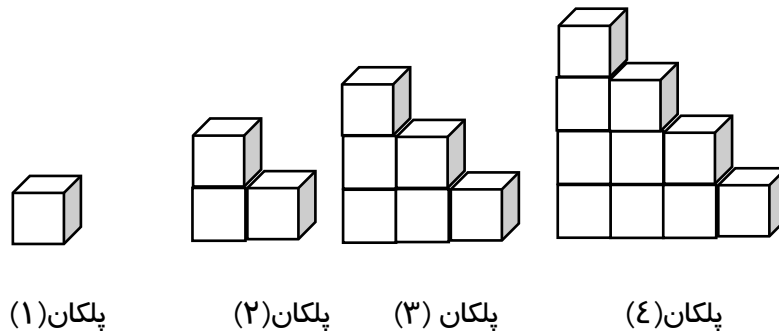
شماره شکل	11	17			
تعداد			94	98	202
چوب کبریت‌ها					

ز) اگر تعداد چوب کبریت‌های بکار رفته در ساخت یک شکل را بدانیم، چگونه

می‌توانیم شماره آن شکل را پیدا کنیم؟

ح) آیا با هر تعداد چوب کبریت دلخواه می توانیم یکی از شکل های الگوی بالا را بسازیم؟ توضیح دهید.

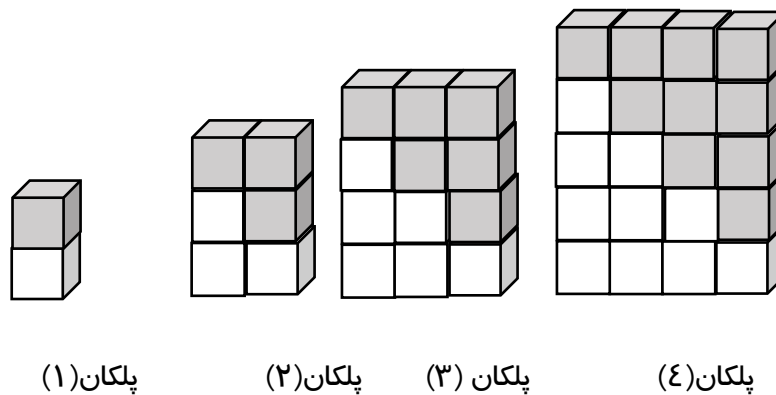
۲- ساختن پلکان ها را به همین ترتیب ادامه می دهیم:



الف) می دانیم ۳۷۴۰۱ مکعب برای ساختن پلکان ۲۷۳ ام لازم است. چند مکعب برای ساختن پلکان بعدی لازم است؟ پلکان بعدی چطور؟

ب) چه تفاوتی میان پاسخ قسمت (الف) این مسأله و قسمت (ب) مسأله قبل مشاهده می کنید؟ توضیح دهید.

ج) با توجه به شکل های زیر توضیح دهید چگونه می توانیم تعداد مکعب های لازم برای ساختن پلکان  $n$  ام را پیدا کنیم. این الگو را با یک عبارت جبری نمایش دهید.



همچنین طرح مسائلی که مشابه مسائل زیر باشد، مسیر مناسبی برای توسعه‌ی استفاده از عبارت های جبری و معادله است.

- اگر بدانیم روز اول فروردین چند شنبه است، می خواهیم بدانیم روز  $a$  از ماه  $b$  چند شنبه خواهد بود؟

راه حل: هر روز هفته را از ۰ تا ۶ شماره گذاری می کنیم و  $c$  می نامیم. عبارت جبری مناسب برای این مسئله در دو حالت به دست می آید:

حالت اول: اگر این روز در شش ماهه اول سال باشد: باقیمانده عبارت زیر به عدد ۷ نمایشگر روز هفته است:  $(b - 1) \times 3 + a + c - 1$

مثال: اگر بدانیم روز اول فروردین جمعه است، روز هفدهم تیرماه چندشنبه است؟

	چهارشنبه ۴	دوشنبه ۲	شنبه ۰
جمعه ۶	پنج شنبه ۵	سه شنبه ۳	یک شنبه ۱

$$\left. \begin{array}{l} a = 17 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow (4 - 1) \times 3 + 17 + 6 - 1 = 31 \Rightarrow 31 \div 7$$

28  
 $\overline{3}$  4  
 یعنی سه شنبه است

حالت دوم: اگر این روز در شش ماهه دوم سال باشد: باقی مانده عبارت زیر بر عدد ۷ نمایشگر روز هفته است:  $(b - 1) \times 2 + a + c - 2$

مثال: اگر بدانیم روز اول فرودین جمعه است. روز پانزدهم آبان چند شنبه است؟

$$\left. \begin{array}{l} a = 15 \\ b = 8 \\ c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow (8 - 1) \times 2 + 15 + 6 - 2 = 33 \Rightarrow 33|7$$

$$\frac{28}{\boxed{5}}^4$$

یعنی پنج شنبه است

• حالا از دانش آموزان بخواهید (اول فروردین را به آنها بگویید) مشخص کنند روز تولدشان چند شنبه است؟

- مسائلی از قبیل تبدیل تاریخ میلادی به شمسی و عکس آن نیز قابل طرح است.

- در مورد انواع معادلات با تعداد متغیرهای بیشتر با دانش آموزان بحث کنید.

- مسائلی مانند زیر طرح کنید:

- اگر در یک تقسیم جای خارج قسمت و مقسوم علیه را عوض کنیم:

الف) اگر مقسوم ثابت باشد آیا باقی مانده تغییر می کند؟

ب) اگر باقی مانده ثابت باشد، آیا مقسوم تغییر می کند؟

$$\text{معادلاتی شبیه} \begin{cases} \frac{3x}{5} + \frac{2x-1}{10} - 3 = 7x + 1 \\ (x-2)(x+3) = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{cases} \text{ نیز مسیر خوبی برای}$$

توسعه‌است.

## استفاده از ابزارهای فن آوران

استفاده از نرم افزار *Excel* جهت ساختن ماشین های عددسازی می تواند بستری برای توسعه تفکر جبری دانش آموزان باشد. تکالیف زیر با این هدف طراحی شده‌اند:

۱- در خانه های  $A1$  تا  $A10$  اعداد ۱ تا ۱۰ را قرار دهید. (کافیست چند عدد اول را بنویسید، سپس خانه های شامل عدد را انتخاب کنید و به سمت پایین بکشید تا به خانه های  $A10$  برسید).

۲- در خانه  $B1$  عبارت  $=2*A1$  را بنویسید و دکمه *Enter* را بزنید. خانه  $B1$  را بگیرید و تا سطر دهم به سمت پایین بکشید. چه اعدادی در ستون  $B$  قرار می گیرند؟

۳- مانند تکلیف (۲)، به کمک آن چه در جبر آموخته اید، اعداد فرد یک تا نوزده را در ستون  $C$  قرار دهید.

۴- به کمک جبر اعداد مربع کامل را در ستون  $D$  قرار دهید.

از نرم افزار جئوجبرا هم می توان برای ساختن ماشین های عددسازی کمک

گرفت.

برای این منظور کافیسست یک لغزنده را به عنوان ورودی ماشین تعریف کرده و عملکرد ماشین را در محل ورود دستورها وارد کنیم. بدین ترتیب با حرکت دادن لغزنده، ورودی و در نتیجه خروجی تغییر می کند.

در مثال زیر ورودی  $a$  از  $-100$  تا  $+100$  به صورت یکی یکی تغییر می کند و خروجی  $b$  با وارد کردن دستور  $5*a+2$  به دست آمده است. همچنین از دانش آموزان بخواهید با استفاده از نرم افزارهایی که در اختیار دارند (مانند *Excel*) در یک ستون، مقدار متغیر و در ستون دیگر، مقدار عبارت های جبری مورد نظر را به دست آورند. سعی کنید اعداد ورودی اعشاری بدهند و پاسخ را مشاهده کنند.

- ممکن است یکی از دانش آموزان ماشین حساب پیشرفته ای در اختیار داشته باشد. معادله بنویسید و جواب آن را مشاهده کنید و از دانش آموزان بخواهید در زنگ تفریح خودشان این کار را انجام دهند.

- اگر دانش آموزان اینترنت در دسترس داشته باشند بخواهید نرم افزار *Math way* را حتماً مشاهده کنند که البته قابل نصب بر گوشی های تلفن همراه هم می باشد و محاسبات جبری از قبیل توان های ۲ یا ۳ یا ... با عبارت های جبری را ببینند.

- از دانش آموزان بخواهید فرمول هایی که در درس علوم یاد گرفته اند مانند  $Q = mc\Delta\theta$  را بیان کنند و سپس طوری بنویسند که خواسته مسئله

$$m = \frac{Q}{c\Delta\theta} \text{ یا } \frac{Q}{m\Delta\theta} \text{ تنها باشد مثل:}$$

حالا با دادن مقادیر مختلف و با استفاده از ماشین حساب حل کنند.

## معرفی منابع برای معلمان

- تاریخ ریاضیات: تألیف پرویز شهریاری؛ انتشارات مدرسه؛ فصل ۲
- ریاضیات برای معلمان؛ تألیف گروهی از نویسندگان به سرپرستی جی.ال. مارتین؛ ترجمه شهرناز بخشعلی زاده؛ انتشارات مدرسه؛ فصل های ۲۴ و ۲۵
- خلاقیت ریاضی؛ تألیف جرج پولیا؛ ترجمه پرویز شهریاری؛ انتشارات فاطمی؛ فصل ۲

- الگوها، عبارت ها و معادله های جبری از مجموعه کتاب های دانش پایه؛ تألیف زهره پندی؛ انتشارات مدرسه
- عبارت ها و معادله های جبری از مجموعه کتاب های کوچک ریاضی؛ تألیف علی حسن زاده ماکویی؛ انتشارات مدرسه



«نمونه سؤال های ارزشیابی»

(۱) ساده کنید.

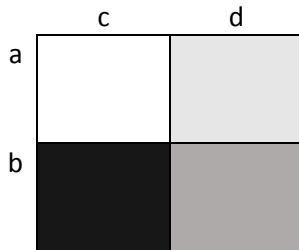
الف)  $\frac{3}{5}x - 2y + x - \frac{1}{3}y =$

ب)  $(x - y)^2 =$

ج)  $(2a + b)(2a - b) =$

(۲) حاصل  $\overline{ab} - \overline{ba}$  را ساده کنید.

(۳) با استفاده از شکل مقابل (برای مساحت ها) یک تساوی جبری بنویسید.



(۴) مقدار عددی عبارت  $2a - (a + b)^2 + 3ab$  را به ازای  $a = 3, b =$

2- بیابید.

(۵) حاصل  $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \dots (x - 18)$  به ازای  $x = 15$  چه

عددی خواهد شد؟

(۶) تجزیه کنید.

$$20a^3b^2 - 15a^2b^3 =$$

(۷) معادله مقابل را حل کنید.

$$3 - \frac{x-2}{3} = x$$

(۸) در یک لوزی اندازه زاویه باز ۳ برابر زاویه تند آن است. زاویه تند لوزی

چند درجه است؟

(۹) در صورتی که بدانیم اندازه قاعده ی یک مثلث ۴ برابر ارتفاع آن است،

مساحت مثلث را با یک عبارت جبری نشان دهید.

## ساده کردن عبارت های جبری

### هدف

در فرآیند آموزش این دروس انتظار می رود هر دانش آموز به هدف های زیر برسد:

۱- از کاربرد حروف درک خوبی داشته باشد و حروف را در بیان روابط کلی و قواعد به کار برد.

۲- هنگام ساده کردن یک عبارت، جمع و تفریق جملات متشابه را به کار برد.

۳- از عبارت های جبری برای بیان «الگوها» و روابط هندسی مانند مساحت و محیط استفاده کند.

۴- از ضرب جمله در جمله، جمله در پرانتز و پرانتز در پرانتز، برای ساده کردن عبارت های جبری استفاده کند.

۵- عبارت های جبری را در بیان اثبات های جبری به کار برد.

### ابزار مورد نیاز

۱) چوب کبریت      ۲) شکل هندسی ماهیت های توزیع پذیری با مقوا

### روش تدریس

هدف کلی این درس علاوه بر یادآوری نحوه استفاده از عبارت های جبری، کاربرد آن در بیان قاعده و قانون های کشف شده در الگوهاست.

همانطور که می دانید دانش آموزان در پایه هفتم تا حدی با جبر آشنایی دارند بنابراین بدون توضیحات زیاد می توانند فعالیت ص ۵۲ را حل کنند. بهتر است این فعالیت را به صورت گروهی بحث کنند و الگوهای داده شده را ساده کنند. شاید دانش آموزی روشی برای شمارش چوب کبریت های سؤال ۳ به صورت  $4n-(n-1)$  بیابد که در بحث و گفتگوها به درستی آن پی می برد ولی در تنهایی نتواند به شما پاسخ دهد.

هدف فعالیت اول، یادآوری درس جبر پایه هفتم است.

در کار در کلاس ص ۵۳ دانش آموزان جملات متشابه را شناخته و با ضرب یک عدد در پرانتز آشنا می شوند.

هدف فعالیت ص ۵۳ یاد دادن ضرب چند جمله ای ها از طریق مساحت (هندسی) است.

در حل تمرین ۵ صفحه ۵۵ دقت دانش آموزان در علامت منفی پشت یک عبارت (پرانتز) و ضرب عبارت پشت پرانتز در تک تک جملات آن هدف بوده است.

**حل بعضی تمرین ها:**

در تمرین ۱ ص ۵۵ نیز ساده کردن یک عدد دو رقمی و متناوبش که به صورت زیر است خواسته شده:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b$$

## توصیه های آموزشی

۱- چون در فصل ۱ کاملاً با مباحث جمع و تفریق اعداد صحیح و گویا آشنا شده‌اند از درستی جمع و تفریق و ... اعداد صحیح و گویا اطمینان حاصل کنید.

۲- در بررسی جواب ها، از دانش آموزان بخواهید علت اشتباهات خود را پیدا کنند.

۳- توصیه می کنیم که حتماً در کلاس ساده کردن دو عبارت مهم مانند  $x+x$  و  $x \times x$  یا  $ab+ab$  و  $ab \times ab$  را انجام دهید تا دانش آموزان بتوانند سوال ۳ ص ۵۵ را به راحتی حل کنند.

۴- در بیان الگوها از دانش آموزان بخواهید اطلاعات را به کمک جدول دسته‌بندی کنند تا بهتر بتوانند روابط را تشخیص دهند.

## اشتباهات رایج دانش آموزان

۱- دانش آموزان معمولاً در تمرین های مشابه تمرین ۵ ص ۵۵ اشتباهاتی دارند، لطفاً در کلاس بر این موضوع تأکید نمائید.

۲- یکی دیگر از اشتباهات دانش آموزان در جمع به اشتباه  $x+x$  را به صورت  $x^2$  و یا  $-ab-ab$  را صفر و یا  $ab+ab$  را به صورت  $(ab)^2$  در نظر می گیرند به این موضوع نیز توجه بفرمائید.

۳- در جملاتی مانند  $a^2b$  و  $ab^2$  به اشتباه متشابه می گیرند و بعضی اوقات  $ab$  و  $a^2b$  و  $ab^2$  را نیز متشابه فرض می کنند.

## «پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری»

### هدف

۱- ماشین های عددساز را بشناسد و بتواند برای هر ورودی، خروجی را محاسبه کند.

۲- مقدار عددی یک عبارت جبری را محاسبه کند.

۳- با توجه به ورودی و خروجی های داده شده، رابطه‌ی بین آنها را حدس بزنند.

۴- استفاده از تساوی های جبری و پیدا کردن مقدار یک عبارت را در حل مسئله‌های سایر دروس نیز به کار برد.

### ابزار مورد نیاز

ماشین های ورودی و خروجی مقوایی

### روش تدریس

همانطور که می دانید یکی از کاربردهای فعالیت ها در بحث عبارت های جبری، پیدا کردن مقدار یک عبارت به ازای مقادیر مختلف متغیر آن است. بنابراین شناخت ماشین های عددساز اهمیت فراوانی دارد.

در فعالیت ص ۵۶ دقت کنید دانش آموزان معنی ورودی و خروجی را متوجه

شوند

هدف کلی فعالیت پیدا کردن مقدار عددی است ولی با توجه به درس سال نهم که مفهوم معادله خط و رسم خط در آنجا هست مقدمه‌ای برای نقطه یابی هم خواهد بود.

در فعالیت ۱ ص ۵۶ دانش آموزان فقط یک عمل روی عدد ورودی انجام می‌دهند.

در فعالیت ۲ این صفحه دانش آموزان یاد می‌گیرند که دو عمل پشت سرهم روی عدد ورودی انجام دهند.

در کار در کلاس ۲ و ۱ صفحه ۵۷ نیز دانش آموزان می‌توانند همان هدف را دنبال کنند.

در کار در کلاس شماره ۳ این صفحه دانش آموزان با توجه به ورودی و خروجی، کار هر ماشین را حدس می‌زنند و این کار در کلاس علاوه بر خلاقیت دانش آموزان مقدمه‌ای برای سال آینده نیز خواهد شد.

هدف فعالیت پائین صفحه ۵۷ نیز درک دانش آموزان از نماد عدد زوج که به صورت  $2n$  است.

در فعالیت ۵ ص ۵۸ دانش آموزان با لزوم اثبات جبری آشنا می‌شوند. لطفاً قبل از اینکه شروع به حل فعالیت داشته باشید دانش آموزان را با بسته بودن اعداد طبیعی نسبت به جمع و ضرب آشنا کنید. البته نباید کلمه بسته بودن را استفاده کنید فقط عنوان کنید که ضرب دو عدد طبیعی، طبیعی است و جمع دو عدد طبیعی، طبیعی است.

در تمرین صفحه ۵۹ سوال ۴ هدف این است که دانش آموزان بفهمند جواب معادله باید در معادله صدق کند و «معادله یک تساوی است که به ازای بعضی عددها برقرار است.»

در سؤال ۷ همین صفحه کاربرد ریاضی در سایر دروس مشاهده می شود.

### توصیه های آموزشی

۱- رابطه ی بین ورودی و خروجی همان مفهوم معادله خط است لذا برای این موضوع به قدر کفایت وقت بگذارید.

۲- درک این مفهوم که یک عدد زوج به صورت  $2n$  است و برای عدد دیگر از  $2m$  استفاده می کنیم، اهمیت زیادی دارد. در موارد مشابه توجه بچه ها را به این موضوع جلب کنید.

### بدهمی های رایج دانش آموزان

۱- در حدس زدن رابطه ی بین ورودی و خروجی، با اولین مثال حدس می زنند و توجه نمی کنند که این رابطه ممکن است برای بقیه ورودی و خروجی ها صدق نکند.

۲- در درک این موضوع که  $4n$  را می توان به صورت  $2(2n)$  نوشت، اشکال دارند و اهمیت این موضوع که برای اثبات زوج بودن یک عبارت نیاز است آن را به صورت  $2 \times \square$  نشان داد را درک نمی کنند.



## تجزیه عبارت های جبری

### هدف

- ۱- دانش آموز بتواند خاصیت توزیع پذیری را تشخیص دهد.
- ۲- با ضرب دو چند جمله ای (دو پرانتز) آشنا شود.
- ۳- دو چند جمله ای که عامل مشترک دارند، به ضرب دو عبارت تبدیل کنید.
- ۴- به کمک تجزیه کسرهای جبری را ساده کنید.

### ابزار مورد نیاز

- ۱- تهیه رنگهای مختلف گچ (یا ماژیک) برای نشان دادن قسمت های مشترک دو چند جمله ای
- ۲- می توانید از رایانه و برنامه های تهیه شده استفاده کنید.
- ۳- ماشین حساب: می توانید از دانش آموزان بخواهید عبارت های عددی مانند  $5 \times (151 + 193)$  و  $5 \times 151 + 5 \times 193$  را با کمک ماشین حساب به دست آورند و با هم مقایسه کنند. این کار انگیزه خوبی به دانش آموزان خواهد داد.

### روش تدریس

هدف اصلی فعالیت ۱ ص ۶۰ یادآوری قوانین سال گذشته است. پس می توانید ابتدا از دانش آموزان بخواهید مفاهیمی را که از سال گذشته درباره ب.م. به خاطر دارند برای شما و کلاس توضیح دهند. سپس به حل فعالیت ۱ ص ۶۰ پردازند.

در فعالیت ۲ نیز دانش آموزان با خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع آشنا می شوند و سپس با عمل برعکس آن که «تجزیه» یا «تبدیل به ضرب» نامیده می شود آشنا خواهند شد.

به دانش آموزان توصیه کنید که به مثال های حل شده دقت کنند و الگوی موجود در آن ها را کشف کنند.

باز هم برای ایجاد انگیزه قبل از درس می توانید از مثال های کسری مانند  $\frac{175 \times 17 + 175 \times 19}{175 \times 3 + 175 \times 16}$  استفاده کنید و با تجزیه کردن و ساده کردن کاربرد آن را بیان کنید.

البته در دوران دبستان با خاصیت توزیع پذیری آشنا شده اند پس همراه داشتن کتاب آن دوره هم وسیله خوبی برای ایجاد انگیزه ی مناسب و ارتباط کتاب ها خواهد بود.

در تمرین ۲ که در اصطلاح فاکتورگیری نامیده می شود دانش آموزان با عکس خاصیت توزیع پذیری کاملاً آشنا می شوند. این فعالیت بسیار حائز اهمیت است.

در فعالیت ۳ ص ۶۰ پیدا کردن جمله مشترک موجود، چه در اعداد و چه در قسمت حرفی جملات از اهداف مهم به شمار می رود. شاید میزان استفاده از عکس

خاصیت توزیع پذیری بیشتر از خود آن باشد، بنابراین، کسب این مهارت ضروری به نظر می رسد.

حالا از دانش آموزان بخواهید فعالیت ۴ ص ۶۱ را به کمک یافته های خود پاسخ دهند و قانون مورد نظر را (که خودشان از فعالیت ۳ کشف کرده اند) به کار ببرند. پیشنهاد می کنیم که انتخاب عامل مشترک (ب.م.م) و درست نوشتن داخل پرانتزها را از همان ابتدا مورد توجه قرار دهید.

در فعالیت ۱ ص ۶۲ همانطور که قبلاً هم اشاره شد دانش آموزان به تفاوت  $x+x$  و  $x \times x$  پی می برند و این موضوع در فعالیت ۴ استفاده می شود.

در فعالیت ۳ یکی دیگر از نکات مهم که اکثر دانش آموزان به اشتباه استفاده می کنند با مثال عددی بیان شده و امید است که بتواند از بدفهمی دانش آموزان جلوگیری کند.

در کار در کلاس صفحه ۶۲ سؤال ۲ خاصیت جابجایی در عمل ضرب گفته شده است و در کار در کلاس ۳ همین صفحه بر توان و عبارت های جبری و نیز علامت تأکید شده است.

### حل بعضی از تمرین ها

در سؤال ۲ صفحه ۷۳ لزوم اثبات جبری برای درک شهودی دانش آموزان تأکید شده است که هدف:

$$\left. \begin{array}{l} A = 2k + 1 \\ B = 2k' + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A + B = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1)$$

درک از عدد فرد و درک از جمع و تبدیل به ضرب است.

در سؤال ۶ که خیلی جالب و کاربردی است نیز همه اهداف گفته در درس

استفاده می شود:  $(a > b)$

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$$

### توصیه های آموزشی

۱- مهمترین توصیه این است که در این درس سعی کنید همه موارد تبدیل

به ضرب را آموزش دهید ولی حتماً تأکید بر (ب.م.م) شود.

۲- دانش آموزان با حل فعالیت ۲ صفحه ۶۲ به این نکته پی ببرند که

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

۳- از دانش آموزان بخواهید در محاسبات خود از هر خاصیتی که استفاده

می کنند، نام ببرند. زیرا این کار باعث می شود که برای هر محاسبه

دلیل بیاورند که خود باعث جلوگیری از عمل های بدون دلیل خواهد

شد.

۴- جابه جایی، ساده کردن، توزیع پذیری، عکس خاصیت توزیع پذیری

(تجزیه)، شرکت پذیری، ترتیب انجام عملیات و ... دلایلی است که

دانش آموزان باید بیان کنند.

### اشتباهات رایج دانش آموزان (بدفهمی ها)

۱- معمولاً دانش آموزان در عبارت های دارای بیش از یک متغیر (مثل  $x^2y$

و  $xy^2$  و ...) در تشخیص جملات متشابه دچار اشتباه می شوند.

۲- همانطور که گفته شد  $(a+b)^2$  یا  $(a-b)^2$  را به اشتباه  $a^2+b^2$  یا  $a^2-b^2$  می نویسند.

۳- دانش آموزان معمولاً همه قسمت های مشترک را ممکن است تشخیص ندهند که البته در تبدیل به ضرب اشکال نمره ای ندارد لطفاً دقت کنید که صحیح یاد بگیرند.

## معادله

### هدف

- ۱- با استفاده از راهبرد تشکیل معادله، مسئله را حل کند.
- ۲- مهارت در حل معادله به صورت  $ax+b=c$  را پیدا کند (معادلات یک مجهولی درجه اول را حل کند).
- ۳- روش حل معادلات کسری را درک کند.
- ۴- با ضرب یک عدد در دو طرف معادله کسری، آن را حل کند.

### ابزار مورد نیاز

- ۱- نمودارهای حل معادله روی مقوا

### روش تدریس

هدف کلی این فعالیت آشنایی با راهبرد حل مسئله از طریق معادله است.

فعالیت ص ۶۴ کاملاً یادآوری درس معادله سال هفتم است ولی به مدل های مختلف. بنابراین بدون توضیح از دانش آموزان بخواهید این صفحه را بخوانند و راه حل هر کدام را کامل کنند و توضیح دهند.

البته قبل از انجام فعالیت اگر نیاز است از دانش آموزان بخواهید درباره «معادله» و یا جمله «معادله را حل کنید» توضیح بدهند.

برای یادآوری از ماشین های عددسازی هم می توانید استفاده کنید به این صورت که این بار خروجی را بدهید و ورودی را بخواهید.

در ادامه با حل فعالیت ۲ ص ۶۵ روش حل معادلات یک مجهولی درجه اول مرور و سپس چگونگی حل معادلات فعالیت ۳ را آموزش دهید.

هدف کار در کلاس هم تمرین روش حل معادله است. برگزاری مسابقه کلاسی می تواند راهی برای رسیدن به این هدف باشد.

هدف فعالیت ص ۶۶ حل معادلات کسری یک مجهولی و درجه اول است. برای رسیدن به این هدف دو روش یکتا و یگانه بیان شده است تا دانش آموزان ببینند که هر دو روش پاسخ یکسان دارند.

در فعالیت ۲ یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان نوشته شده، که امید است مشکل آن ها حل شود.

با حل کار در کلاس ص ۶ دانش آموزان مهارت در حل این نوع معادلات پیدا خواهند کرد.

## حل بعضی از تمرین ها

در تمرین های این بخش همه سؤال ها خوب و جالب اند ولی سؤالات زیر اهمیت بیشتری دارند. در سؤال ۲ مفهوم محیط بیان شده و کاربرد معادله در هندسه بیان شده است:

$$2(x+5)=24 \Rightarrow x+5=12 \Rightarrow \underline{x=7} \quad \text{طول مستطیل}$$

در سؤال ۹ نیز دانش آموزان با تشکیل معادله و حل آن، کاربرد در درس دیگر را یاد می گیرند.

$$\left. \begin{array}{l} W = 12 \\ F = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 = 4 \times d \Rightarrow d = 3$$

## توصیه های آموزشی

۱- نوشتن مراحل حل معادله زیر هم، روش مناسبی برای جلوگیری از اشتباهات رایج است.

۲- از دانش آموزان بخواهید مرحله بازگشت به عقب (در راهبرد حل مسئله) را فراموش نکنند و خودشان درباره درستی جواب اطمینان حاصل کنند.

۳- یکی از روش های حل مسئله حدس و آزمایش است اگر دانش آموزان به استفاده از این راهبرد علاقه داشتند (در صورت اطمینان از یادگیری حل معادله) استفاده از این روش با تنظیم جدول، حدس و آزمایش قابل قبول خواهد بود.

ع- اگر از کلماتی نظیر «طرف معلوم» یا «ضریب مجهول» در بیان خود استفاده می کنید حتماً در کلاس در مورد آنها توضیحات لازم را بدهید.



## اشتباهات رایج دانش آموزان (بدفهمی ها)

۱- دانش آموزان معمولاً در هنگام ضرب معادله در یک عدد، فراموش می‌کنند که آن عدد را در عددهای ثابت ضرب کنند. لطفاً در کلاس روی این مورد تأکید بفرمائید.

۲- یکی از اشتباهات در فعالیت ۲ ص ۶۶ تأکید شده است.

۳- معمولاً دانش آموزان در جابه جایی از یک طرف تساوی به طرف دیگر، علامت را فراموش می‌کنند.